P1 - 2008.1

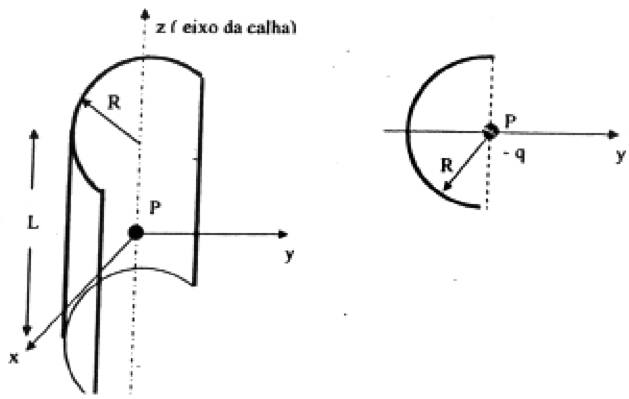
1ª Questão: (3.5)

(a) Utilizando a lei de Gauss demonstre que o vetor campo elétrico de um fio isolante muito longo carregado com uma carga total Q positiva uniformemente distribuída é $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$ onde $\lambda = \dfrac{Q}{L} = \dfrac{dq}{dz}$.

Considere agora um sistema constituído de uma calha isolante semicilíndrica de raio R, comprimento L muito grande e de densidade superficial de carga σ positiva, uniforme e constante, conforme a figura.

(b) Determine o vetor campo elétrico no ponto P no eixo da calha. *(Sugestão: adapte a solução encontrada no item (a) para a calha como sendo composta de uma infinidade de fios elementares).*

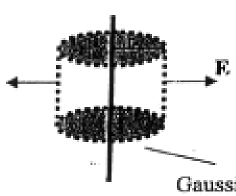
(c) Calcule a força sobre uma partícula de carga –q (q>0) localizada em P.



Gabarito – 2a questão – P1-2008/1

a) (1,0 ponto)

- Campo elétrico radial e simetria cilíndrica (figura) ⇒ Lei de Gauss



Gaussiana (cilindro coaxial de raio r)

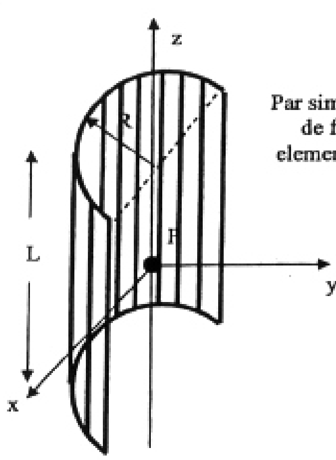
- Fluxo através das tampas da gaussiana = 0

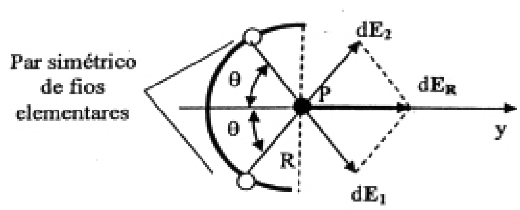
- Fluxo através da superfície lateral da gaussiana:

$$\Phi_E = \int E\cos\theta\, dA = E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \quad (\cos\theta = 1,\ \text{E cosnstante})$$

$$\overline{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\overline{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r}\overline{r}$$

b)





$$dE_1 = dE_2 = dE = \frac{dQ}{2\pi\varepsilon_0 LR} \quad (0,6) \quad ; \quad dQ = \sigma\, dA = \sigma LR\, d\theta \quad (0,5)$$

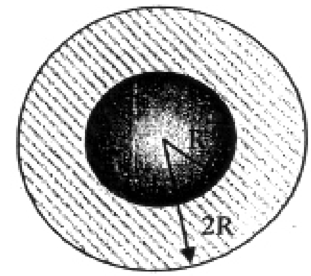
$$d\overline{E_P} = 2\, dE\cos\theta\,\overline{y} = \frac{\sigma\cos\theta}{\pi\varepsilon_0}\overline{y} \quad (0,5) \Rightarrow \overline{E_P} = \int_0^{\pi/2}\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\cos\theta\, d\theta\,\overline{y} = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\overline{y} \quad (0,5)$$

c)

$$F = -q\,\overline{E_P} = -\frac{q\sigma}{\pi\varepsilon_0}\overline{y}$$

2ª Questão: (3.5)

Uma esfera condutora maciça de raio R possui uma carga positiva Q. A esfera está no interior de uma esfera oca isolante e concêntrica com raio interno R e raio externo 2R. A esfera isolante possui uma densidade de carga uniforme ρ.



(a) Calcule o valor de ρ para que a carga total do sistema seja igual a zero.

(b) Utilizando o valor de ρ encontrado no item anterior, determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico em cada uma das regiões **(justifique as suas afirmações)**:

i. $0 < r < R$
ii. $R < r < 2R$
iii. $r > 2R$

(c) Esboce um gráfico do módulo do campo elétrico m função da distância r (*Sugestão: calcule E para r = R e r = 2R*)

(d) Calcule o valor do fluxo elétrico ϕ através de uma superfície esférica de raio $r = \frac{3}{2}R$.

2º) Questão

1

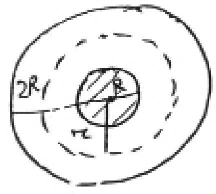
a) $\rho = \frac{Q}{\mathcal{V}}$ $\quad \mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi(2R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 =$

$$= \frac{4}{3}\pi\left[8R^3 - R^3\right] = \frac{28\pi R^3}{3}$$

$\boxed{\rho = -\frac{3Q}{28\pi R^3}}$ para que Q total do sistema = 0.

b) i) $\bar{E} = \bar{0}$ (dentro de um condutor em equilíbrio eletrostático)

ii)



$R < r < 2R$ por Gauss:

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

$\vec{E} \parallel d\hat{A} \Rightarrow \oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = \oint E\, dA =$ (E uniforme) $=$

$$E \oint dA = E\, 4\pi r^2 = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

$|E| = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ $\quad Q_i = ?$

Qi é a carga interna a superfície gaussiana tracejada de raio "r". Portanto:

$Q_i = Q + Q'$ onde Q é a carga da esfera condutora interna e Q' é a parte da carga da casca isolante.

$Q' = ?$ $\quad \rho = \rho'$

$$-\frac{3Q}{28\pi R^3} = \frac{Q'}{\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R^3\right)}$$

$$Q' = -\frac{3Q}{\cancel{28\pi} R^3}\,\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cancel{\pi}\left(r^3 - R^3\right)$$

$$Q' = \frac{Q}{7}\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Q_i = Q + Q' = Q + \frac{Q}{7}\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$$

$$Q_i = Q\left[\frac{8}{7} - \frac{r^3}{7R^3}\right]$$

$$|E| = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, Q\left[\frac{8}{7} - \frac{r^3}{7R^3}\right]$$

$$|E| = \frac{2Q}{7\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{r}{8R^3}\right]$$

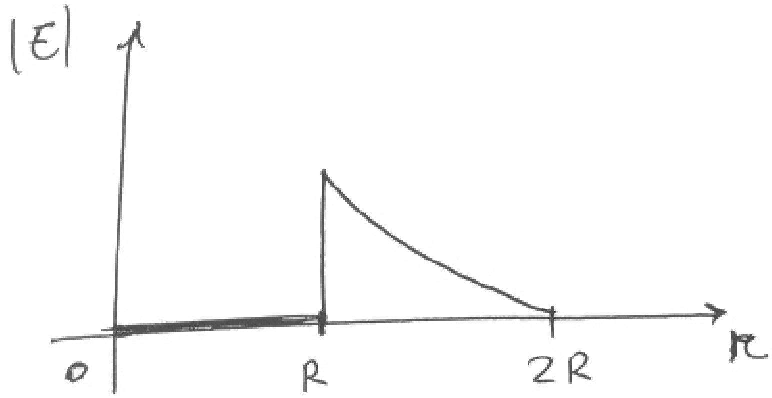
$$\bar{E} = \frac{2Q}{7\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{r}{8R^3}\right]\hat{r}$$

---

iii) $r > 2R$ $\quad \bar{E} = \bar{0}$ $\quad$ já que a carga total do sistema é nula

c) Em $r = R$ $\quad |E| = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$

Em $r = 2R$ $\quad |E| = 0$



d) $\phi_e = \oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = \dfrac{Q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow \phi_e = \dfrac{Q_i}{\epsilon_0}$

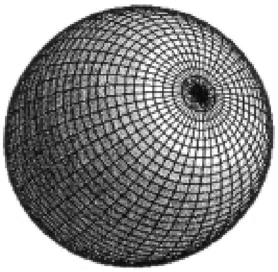
$Q_i = Q\left[\dfrac{8}{7} - \dfrac{r^3}{7R^3}\right]$ para $r = \dfrac{3}{2}R$

$Q_i = \dfrac{Q}{7}\left[8 - \dfrac{9\cancel{R^3}}{8\cancel{R^3}}\right] = -\dfrac{55}{56}Q$

$\Rightarrow \boxed{\phi_e = -\dfrac{55\,Q}{56\,\epsilon_0}}$

3ª Questão: (3,0)

Carrega-se uma esfera condutora de 20 cm de raio com uma carga positiva de 2 nC. Considere a referência do potencial num ponto muito distante da esfera.



a) Qual é o potencial na superfície da esfera? **(1,0 ponto)**

b) Qual é o potencial no centro da esfera? **(1,0 ponto)**

c) Qual é o trabalho realizado por uma força externa para trazer uma carga positiva $q = 2x10^{-3}$ nC do infinito até a superfície da esfera? **(1,0 ponto)**

Solução:

a) Usando a lei de Gauss, o campo elétrico na região externa à esfera é o mesmo que se obtém com toda a carga concentrada no centro:

$$\vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Com a referência no infinito o potencial na região exterior (incluindo a superfície) é dado por:

$$V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{r} E(r')\,dr' = \int_{r}^{\infty} E(r')\,dr' = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r}^{\infty}\frac{dr'}{(r')^2} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}(-\frac{1}{r})\bigg|_{r}^{\infty} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Que é também o mesmo que se obteria se a carga estivesse concentrada no centro.

Assim, o potencial será:

$$V(r = 20\,cm) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\times10^{-9}}{(20\times10^{-2})} = 9\times10^{9}\times\frac{2\times10^{-9}}{(20\times10^{-2})} = 90\,V$$

b) Como a esfera é condutora, o campo no seu interior é nulo e, conseqüentemente, o potencial é constante em toda a esfera. Então:

$$V(r = 0) = 90\ V$$

c) O trabalho realizado por uma força externa é igual à variação da energia potencial:

$$W_{ext} = U(final) - U(inicial) = qV(final) - qV(inicial) = qV(r = 20\,cm) - V(\infty) = qV(r = 20\,cm)$$

$$W_{ext} = 2\times10^{-3}\times10^{-9}\times90 = 180\times10^{-12}\,J$$