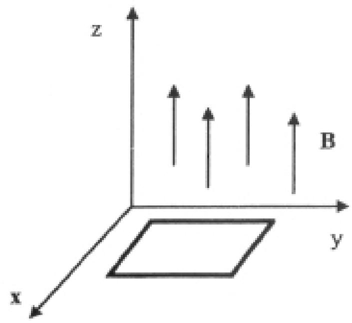
P3 - 2007.1

**1ª Questão: (3,5)**

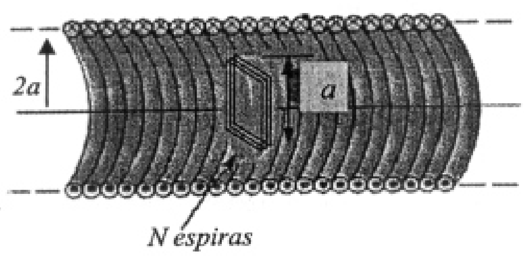
Responda esta questão na forma analítica e numérica.




a) **(0,8)** Considere uma espira quadrada simples, com lado *a=0,20 m*, colocada no plano *xy*. A resistência da espira é $R = 4\cdot 10^{-3}\Omega$ Um campo magnético $\vec{B}$ na direção **z**, homogêneo em todo o plano da espira, induz nela uma corrente *I = 2,0 A*. Qual é a taxa de variação temporal do campo magnético?

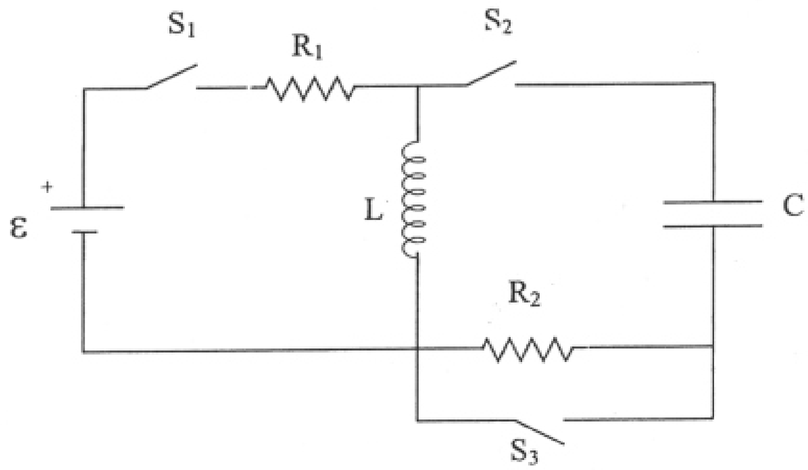
b) **(1,2)** Suponha agora que a espira gire em torno de um dos lados (na direção do eixo *x*) numa região onde o campo magnético é constante, uniforme e tem direção *z* ($\vec{B} = B_0$ **z**, onde $B_0$ = *1,0 T*). A espira dá uma volta completa em seu eixo com um período *T = 3,14* s e no instante t = 0 s, a espira está no plano *xy*. Escreva a expressão da força eletromotriz induzida na espira.

c) **(1,5)** Suponha agora que seja construída uma bobina com *N=10* espiras iguais as dos itens anteriores (a resistência de cada espira é $R = 4\cdot 10^{-3}\Omega$ ) e que esta seja colocada no interior de um solenóide muito comprido de raio *2a*, coaxial com o seu eixo, como mostrado na figura ao lado. O campo magnético produzido pelo solenóide varia de acordo com a equação $B(t) = B_0 + b\,t + \frac{1}{2}ct^2$ onde $B_0$ = *1,0* T, *b = 1,0* T/s e *c = 0,50* T/s². Qual será a corrente induzida na bobina quadrada, em função do tempo? Calcule-a em *t = 2,0* s.




**2ª Questão: (3,5)**

Considere o circuito abaixo onde C é um capacitor de 9 pF , L um indutor de 9 μH, $R_1$ = 900 Ω, $R_2$ = 1 Ω e ε = 9 V.




**(0,8) Fase1**

Se no instante t=0 a chave $S_1$ é fechada com $S_2$ e $S_3$ abertas e estando C totalmente descarregado, determine:

a) A corrente no indutor após longo tempo com $S_1$ fechada e $S_2$ e $S_3$ abertas.

b) A energia transferida pela bateria ao indutor após longo tempo com $S_1$ fechada.

**(1,2) Fase 2**

Se depois de longo tempo a chave $S_1$ é aberta e $S_2$ e $S_3$ fechadas, e tomando t=0 quando $S_2$ e $S_3$ são fechadas, determine:

c) A corrente instantânea, I(t), função do tempo, no indutor a partir deste instante.

d) A diferença de potencial em $R_2$ a partir deste instante.

e) A soma das energias instantâneas armazenadas no capacitor e indutor a partir deste instante. Justifique.

**(1,5) Fase 3**

Se após algum tempo $S_3$ é aberta, permanecendo $S_2$ fechada e $S_1$ aberta, determine:

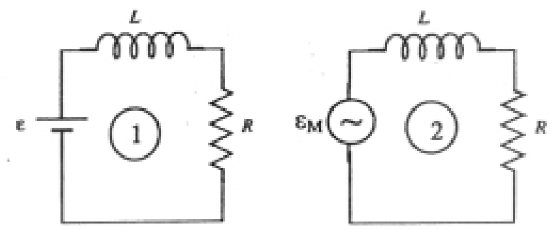
f) A carga no capacitor e a corrente no indutor após longo tempo com $S_3$ aberta.

g) A potência instantânea, função do tempo, dissipada em $R_2$

h) A energia dissipada no resistor $R_2$ após longo tempo com $S_3$ aberta. Justifique.

**3ª Questão: (3,0)**

Considere os dois circuitos (1 e 2) mostrados ao lado. O primeiro é um circuito em corrente continua (ligado há muito tempo) e o segundo é um circuito em corrente alternada. R e L são os mesmos nos dois circuitos. Utilizando um voltímetro é possível medir os seguintes valores de tensão e corrente:



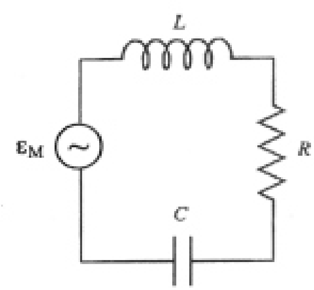

Circuito 1: $\varepsilon = 16$ V ; $I_1 = 2$ A

Circuito 2: $\varepsilon_M = 20$ V ; $I_{2M} = 2$ A (valores máximos).

Sabendo que o gerador de corrente alternada do circuito 2 tem uma freqüência angular $\omega = 60$ rad/s, determine:

(a) **(1.0)** os valores de R e L (valor numérico e unidades !)

Em seguida no circuito 2 é adicionado um capacitor $C = (1/6) \times 10^{-2}$ F em série ao indutor e ao resistor. O novo circuito é aquele mostrado ao lado.




(b) **(1.0)** Utilizando os dados a sua disposição, calcule o novo valor máximo da corrente ($I_M$) e desenhe, em escala, o diagrama de fasores do circuito.

(c) **(0.5)** Calcule a freqüência de ressonância $\omega_0$ do circuito

(d) **(0.5)** Qual é a potência média dissipada no resistor na ressonância ? Fora desta condição esta potência dissipada aumenta, diminui o permanece constante ? Justifique o seu raciocínio.

a) $i_{ind} = 2{,}0\,A$ , $R = 4\times10^{-3}\,\Omega$

$\mathcal{E}_{ind} = R\, i_{ind} = 4\times10^{-3} \times 2 = 8\times10^{-3}\,V$

$\mathcal{E}_{ind} = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = A\left|\frac{dB}{dt}\right| \Rightarrow \left|\frac{dB}{dt}\right| = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{A}$

$\left|\frac{dB}{dt}\right| = \frac{8\times10^{-3}\,V}{(0.2\,m)^2} = 0.2\ T/s$

b) $\vec{B} = (1{,}0\,T)\,\hat{z}$ , constante

$T = 3{,}14\,s \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\ rad/s$

$\theta = \cancel{\theta_0}^{\,0} + \omega t = \omega t \Rightarrow \cos\theta = \cos(\omega t)$

$\Phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int B\, dA \cos\theta \Rightarrow \Phi(t) = Ba^2 \cos\omega t$

$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = B\, a^2\, \omega\, \mathrm{sen}\,\omega t$

$\mathcal{E}_{ind} = 1{,}0 \cdot (0{,}2)^2 \cdot 2 \cdot \mathrm{sen}\, 2t = 0{,}08\ \mathrm{sen}\,(2t)\ [T]$

c) $B(t) = 1{,}0 + 1{,}0t + \frac{1}{2}\, 0{,}5\, t^2$

$\frac{dB}{dt} = 1{,}0 + 0{,}5t$ ; Área $= a^2$ (da espira!)

$|\mathcal{E}_{ind}| = \left|N \frac{d\Phi}{dt}\right| = N \cdot a^2 \cdot \frac{dB}{dt}$

$i = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R_{eq}} = \frac{\cancel{N} a^2}{\underbrace{\cancel{N}R}_{R_{eq}}} \frac{dB}{dt} = \frac{(0.2)^2}{4\times10^{-3}} \cdot (1{,}0 + 0{,}5t)$

$i(t) = 10 + 5t$ ; $i(2s) = 20\,A$.

# GABARITO

## 2ª Questão (P3 - 2007/1)

a) $i_L = \frac{\varepsilon}{R_1} = \frac{9}{900} = 0{,}01\,A$

b) $U_L = \frac{1}{2} L\, i_L^2 = \frac{1}{2} \times 9\times10^{-6} \times (0{,}01)^2 = 4{,}5\times10^{-10}\,J$

c) $i_L(t) = i_m \cos\omega t$ (oscilação sem amortecimento - LC)

$i_m = i_L(0) = 0{,}01\,A$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{9\times10^{-6}\times9\times10^{-12}}} = \frac{10^9}{9}$ radianos/s

$\boxed{i_L(t) = 0{,}01\cos\left(\frac{10^9}{9}t\right)}$

d) zero Volts

e) $U_{TOTAL}(t) = U_L(t) + U_C(t) = U_L(0) = 4{,}5\times10^{-10}\,J$

"A energia inicial armazenada no indutor conserva-se, sendo igual a total do circuito na fase 2."

f) $Q = 0$ e $i_L = 0$

g) $P(t) = R_2\, i_L(t)^2 = R_2\left[e^{-\frac{R_2}{2L}t}\, 0{,}01\cos(\omega' t)\right]^2$ (circuito LCR com amortecimento por $R_2$)

$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{R_2}{2L}\right)^2}$ ; $\omega = \frac{10^9}{9}$ rd/s.

h) $E_{dissipada} = 4{,}5\times10^{-10}\,J$

"Toda a energia inicialmente armazenada no indutor e igual a da fase 2 é consumida por $R_2$ na forma de calor"

a) $R = \frac{\mathcal{E}}{2} = \frac{16}{2} = 8\,\Omega$

$Z = \frac{\mathcal{E}_M}{I_M} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 10\,\Omega$

$(\omega L)^2 = 100 - R^2 = 100 - 64 = 36$

$L = \frac{\sqrt{36}}{\omega} = \frac{6}{60} = 0{,}1\ H$ ✓

b) $R = 8\,\Omega$ ; $L = 0{,}1\ H$ ; $C = \frac{1}{6} \cdot 10^{-2}\ F$

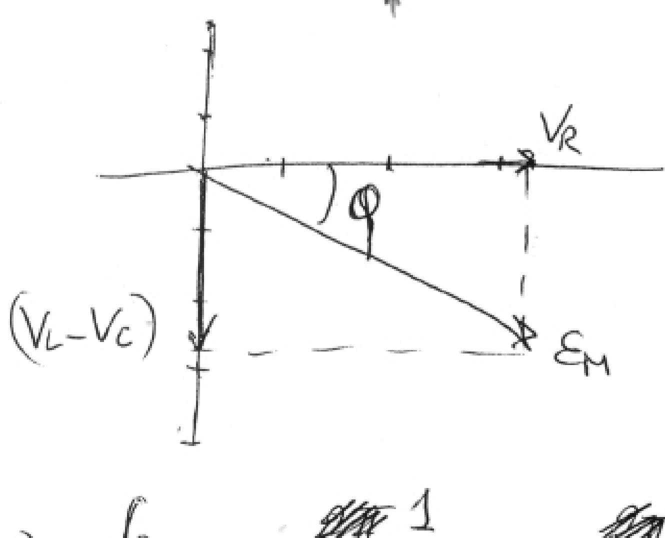
$I_M = \frac{\mathcal{E}_M}{Z}$ ; $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

$Z = \sqrt{64 + (6-10)^2} = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}\ \Omega$

$V_R = 8 \cdot \sqrt{5} = 8\sqrt{20}$

$V_L = X_L \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{20} = 6\sqrt{20}$

$V_C = X_C \sqrt{5} = 10 \cdot \sqrt{20} = 10\sqrt{20}$




$I_M = \frac{20}{4\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

$I_M = \sqrt{5}\ A$

c) $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}1 \cdot \frac{1}{6} 10^{-2}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{10^{-2}}{60}}} = \frac{\sqrt{60}}{0{,}1}$

$f_0 = 10 \cdot 2\sqrt{15} = \frac{20\sqrt{15}}{2\pi} = \frac{10\sqrt{15}}{\pi}$