PUC-RIO – CB-CTC

P3 DE ELETROMAGNETISMO – 24.06.03 – terça-feira

Nome : GABARITO

Assinatura: ______________________________

Matrícula: ______________________ Turma: ____________

NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.

Não é permitido destacar folhas da prova

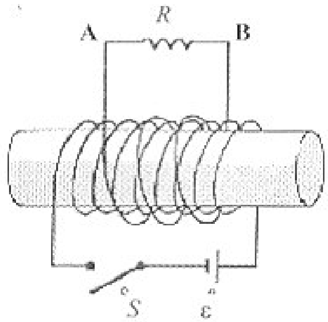
Questão	Valor	Grau	Revisão
1ª Questão	1,5		
2ª Questão	3.0		
3ª Questão	2,5		
4ª Questão	3.0		
Total	10,0		

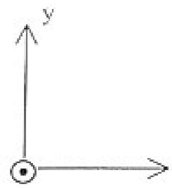
A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.

FKT

1ª Questão (1.5)

Utilize a lei de Faraday-Lenz para responder e justificar as seguintes questões.

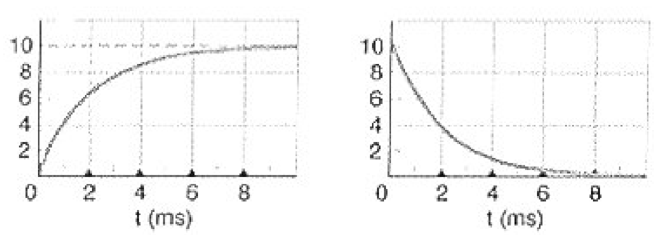




a) **(0.5)** Qual o sentido do campo magnético, no interior comum as duas bobinas, muito tempo depois da chave S, da figura acima, ter sido fechada? Justifique.

b) **(0.5)** Conforme a figura, a corrente que circulará no circuito, através do resistor *R*, fluirá no sentido de A para B ou de B para A? Escreva a lei de Faraday-Lenz e justifique a sua resposta).

c) **(0.5)** Qual dos gráficos abaixo pode representar a corrente no resistor *R*, em função do tempo? **Justifique**.

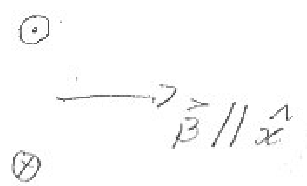


FKT

P3 2003.1

1ª questão:

a) O campo magnético está no sentido $(+\hat{x})$, pois conforme a figura, na bobina que está conectada a fonte, a corrente circulará no sentido que sai da folha do papel na parte superior da figura e, entra na folha do papel na parte inferior da figura.



b) $I_{nd} = \dfrac{\varepsilon_{nd}}{R} = \dfrac{1}{R}\left(-\dfrac{d\phi}{dt}\right)$ ao fechar a chave nós vamos ter um fluxo magnético que aumenta devido ao aumento do campo no sentido $(+\hat{x})$. Sendo assim o $\vec{B}_{ind.}$, para contrariar esta variação, irá estar no sentido $(-\hat{x})$. Portanto a corrente na bobina conectada a resistência R circulará no sentido contrário ao desenhado no item a. Desta forma, conforme a figura corrente através do resistor R, fluirá no sentido de A para B.

c) Grafico (b), pois após um longo tempo o fluxo será constante e portanto $\dfrac{d\phi}{dt}$ nulo. Como $|I_{nd}|\ \dfrac{1}{R}\left|\dfrac{d\phi}{dt}\right|$ temos que o gráfico (b) satisfaz as condições $I_{nd}(t=0) \neq 0$ e $I_{nd}(t=\infty) \equiv$ ZERO

FKT

2ª Questão (3.0)

Uma bobina retangular de lados a e b, com N espiras, gira com velocidade angular ω num campo magnético uniforme de módulo B_o e direção e sentido indicados na figura abaixo. Em $t = 0$ o campo magnético é perpendicular ao plano da bobina (*Fig. 1*).

Fig.1

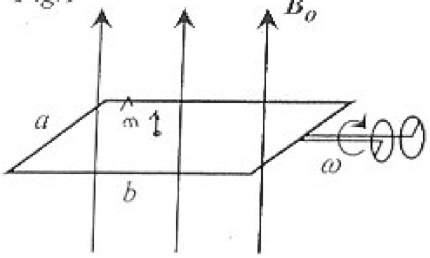
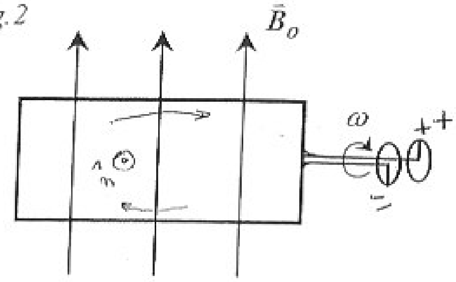


Fig.2



(a) **(1.0)** Encontre a expressão do fluxo magnético através da bobina em função do tempo.

(b) **(0.5)** Encontre a força eletromotriz induzida nos terminais da bobina em função do tempo.

(c) **(1.0)** Indique o sentido da força eletromotriz induzida e a polaridade nos terminais da bobina no instante em que o plano da espira está paralelo ao campo magnético (*Fig. 2* acima, à direita), justificando a partir da Lei de Lenz.

(d) **(0.5)** Considere uma bobina de 20 cm por 10 cm, com 200 espiras, num campo magnético de 0,1 T. Calcule com que freqüência se deve girar a bobina para que se obtenha uma amplitude de voltagem de 12V nos terminais do gerador.

(a) $$\Phi_T = N\Phi = N\int \vec{B}\cdot\hat{m}\,dA = N B\cos\theta \int dA =$$
$$= N B_0 ab \cos\theta$$

$\theta = \theta_0 + \omega t$ como em $t=0$ $\theta = 0$ $\Rightarrow \theta_0 = 0$

$\theta = \omega t$

$$\Phi_T = N B_0 ab \cos\omega t$$

(b) Faraday-Lenz $\rightarrow$ $\varepsilon_{ind} = -\dfrac{d\Phi_T}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\left(N B_0 ab \cos\omega t\right)$

$$\varepsilon_{ind} = N B_0 ab\,\omega\ \text{sen}\,\omega t$$

c) sentido horário e polaridade indicada na Fig. 2.

Pela Lei de Lenz, a f.e.m. induzida tende a gerar uma corrente no sentido de se opor à variação de fluxo que a induziu. Na Fig. 2 o fluxo é nulo e está aumentando. Logo $\mathcal{E}_{ind}$ aparece no sentido de provocar corrente com fluxo para dentro do papel

d)

$a = 0{,}2\ m$

$b = 0{,}1\ m$

$N = 200$

$B_0 = 0{,}1\ T$

$$\mathcal{E}_m = N B_0\, a b\, \omega$$

$$12 = 200 \times 0{,}1 \times 0{,}2 \times 0{,}1\ \omega$$

$$\omega = \frac{12}{0{,}4} = 30 \ \text{rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{15}{\pi}\ Hz$$

3.ª Questão (2.5)

Sabendo-se que a corrente em um circuito RL é dada por $I(t) = I_0\,(1 - e^{-t/\tau})$ onde $I_0 = \varepsilon/R$ e $\tau = L/R$ determine:

a) (0,5) O tempo que a corrente leva para atingir 25 % de seu valor final.

b) (0,5) O valor de L sabendo-se que $R = 0{,}5\ \Omega$ e que a corrente aumenta de 25% em 1,5 s.

c) (0,75) A energia armazenada no indutor em função do tempo e seu valor em $t = \infty$.

d) (0,75) A potencia dissipada no resistor em função do tempo e a energia total dissipada pelo resistor.

a) O valor final da corrente no circuito RL é dado por:

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} I_0 (1 - e^{-t/\tau}) = I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

então para que a corrente atinja 25% de I_0 temos:

$$0{,}25 \cancel{I_0} = \cancel{I_0} (1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = 1 - e^{-t/\tau} \Rightarrow e^{-t/\tau} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-t/\tau} = \frac{3}{4} \qquad -t/\tau = \ln 3/4 \Rightarrow t = -\tau \ln 3/4$$

$$\boxed{t = -\frac{L}{R} \ln \frac{3}{4}} \quad \text{ou} \quad t = -\frac{L}{R}(-0{,}3) = 0{,}3\frac{L}{R} \Rightarrow \boxed{t = 0{,}3\frac{L}{R}}$$

(0,5)

b) Se a corrente aumenta em 25% em $t = 1{,}5\,s$ temos:

$$1{,}5 = -\frac{L}{R} \ln \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{L = -\frac{1{,}5 R}{\ln 3/4}} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{L = -\frac{1{,}5 \cdot 0{,}5}{\ln 3/4}} \quad \text{ou} \quad \boxed{L = -\frac{1{,}5 \cdot 0{,}5}{-0{,}3} = 2{,}5\,H}$$

(0,5)

c) Em um circuito RL a taxa de acúmulo de energia no indutor é dada por:

$$I\varepsilon = I^2 R + \underbrace{L I \frac{dI}{dt}}_{\text{taxa de acúmulo de energia no indutor}}$$

onde $I\varepsilon$ é a potência que a bateria fornece ao circuito, I^2R é a potência dissipada no resistor.

FKT

fim de obter a energia acumulada no indutor temos:

$$U_m = \int dU_m = \int L\, I\, dI = \frac{L I^2}{2}$$

então $U_m(t) = \frac{L}{2} I^2(t)$

$$U_m(t) = \frac{L}{2} I_0^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 \quad \text{e}$$

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} U_m(t) = \frac{L}{2} I_0^2}$$ (0,75)

d) A potência dissipada no resistor em função do tempo é dada por:

$$P_R = R I^2 = R I_0^2 (1 - e^{-t/\tau})^2$$

$$\boxed{P_R(t) = R I_0^2 (1 - e^{-t/\tau})^2}$$ (0,5)

O trabalho total realizado pelo resistor pode ser obtido por:

$$P_R(t) = \frac{dW_R}{dt} = R I_0^2 (1 - e^{-t/\tau})^2$$

$$dW_R = R I_0^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 dt$$

$$W_R = \int dW_R = \int R I_0^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 dt$$

FKT

→ a energia total dissipada pelo resistor é dada

total

$$\boxed{W_R = R I_0^2 \int (1 - e^{-t/\tau})^2 dt}$$

ou

$$W_R = R I_0^2 \int \left(1 + e^{-2t/\tau} - 2 e^{-t/\tau}\right) dt$$

$$\boxed{W_R = R I_0^2 \left[t - \frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} + 2\tau e^{-t/\tau} \right]}$$

(0,25) //

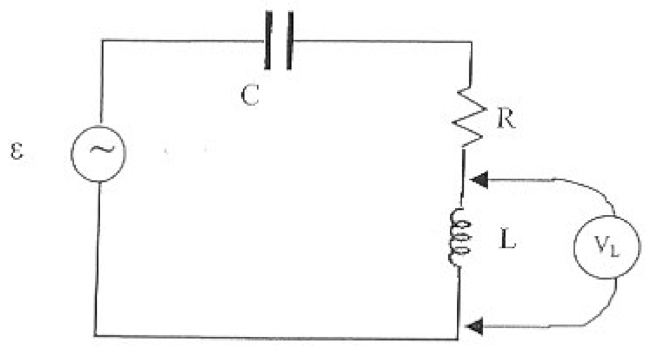
///

FKT

Gabarito.

4ª Questão (3.0)

Considere o circuito em c.a. mostrado em figura.



$R = 4\ \Omega$

$L = \dfrac{1}{20\pi}\ H$

$C = \dfrac{1}{200\pi}\ F$

$\varepsilon = V_M \text{ sen } \omega t$

Sabendo que o valor máximo da tensão V_L medida nas extremidades da indutância L vale $V_L = 10\ V$ e que a frequência do gerador é $f = 50\ Hz$:

(a) (0.5) calcule o valor máximo da corrente I que circula no circuito;

(b) (1.0) chamando V_C a tensão no capacitor e V_R aquela no resistor, desenhe **(em escala)** o diagrama dos fasores do circuito, indicando claramente V_L, V_R, V_C e I.

(c) (0.5) utilizando o diagrama calcule o valor máximo V_M da tensão do gerador e a diferença de fase entre V_M e I ;

(d) (0.5) neste caso, o circuito é mais indutivo ou capacitivo ? **Justifique a sua afirmação**.

(e) (0.5) imagine agora que a frequência f do gerador possa ser variada. Qual seria o valor de ω para que a tensão no resistor seja a máxima possível ? **Justifique**.

(a) $$I = \frac{V_L}{X_L} = \frac{V_L}{\omega L} = \frac{10}{2\pi f \cdot L} = \frac{10}{2\cancel{\pi}50 \cdot \frac{1}{20\cancel{\pi}}} = 2\ A$$

esta corrente é comum a todos os elementos do circuito.

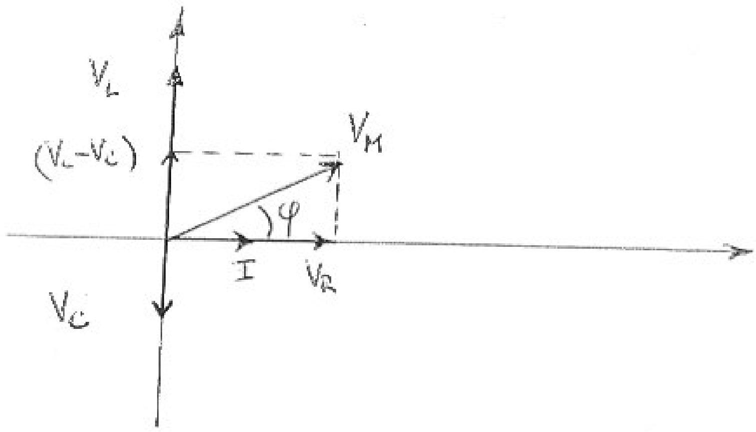
(b) $$V_C = I \cdot X_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{2}{2\cancel{\pi}50 \cdot \frac{1}{200\cancel{\pi}}} = 4\ V$$

$$V_R = I \cdot R = 2 \cdot 4 = 8\ V$$

$\Rightarrow$

FKT

(continuação b)



(c) Pelo diagrama desenhado acima:

$$V_M = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{(8)^2 + (10-4)^2} =$$

$$= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ V}$$

$$V_M = 10 \text{ V}$$

$$\tan\varphi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{\cancel{I}(X_L - X_C)}{\cancel{I} R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$\tan\varphi = \frac{10-4}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(3/4)$$

(d) Sendo $V_L > V_C$ e o ângulo de fase $\varphi > 0$, ou seja a corrente no circuito está atrasada em relação à tensão V_M do gerador, o circuito possui comportamento <u>indutivo</u>

FKT

(e) Variando a frequência do gerador, o valor de R não muda.

Por isso, sendo: $V_R = R \cdot I$, para que V_R seja máxima ocorre que I seja máxima.

Em um circuito RLC série a corrente é máxima na ressonância.

Então:

V_R será máxima por: $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{20\pi} \cdot \frac{1}{200\pi}}} = \sqrt{4000 \cdot \pi^2} = 20\pi\sqrt{10}$$

$$\omega = 20\pi\sqrt{10} \ \text{rad/s}^{-1}$$

FKT