Gabarito G2 de Mat1158 – Cálculo B – 8 de Outubro de 2010

1. Considere $f(x) = 3e^{4x} + 5e^{-5x}$
   a. (0,3) Qual o domínio de f ? $\mathbb{R}$
   b. (0,5) Calcule a derivada de f

   $$f'(x) = 12\,e^{4x} - 25\,e^{-5x} = 12\ \ e^{4x}\left(1 - \frac{25}{12\,e^{9x}}\right)$$

   c. (0,8) intervalos de crescimento e decrescimento de f

   O único número crítico de f, que anula a primeira derivada, é $x^* = \frac{ln\left(\frac{25}{12}\right)}{9}$ pois

   $$1 - \frac{25}{12\,e^{9x}} = 0 \rightarrow\ e^{9x} = \frac{25}{12} \rightarrow 9x = ln\left(\frac{25}{12}\right)$$

   Observe que $f''(x) = 48\,e^{4x} + 125\,e^{-5x} > 0$ logo x^* é mínimo (letra d: 0,4 pts) e f decresce no intervalo $\left(-\infty, \frac{ln\left(\frac{25}{12}\right)}{9}\right)$ e cresce em $\left(\frac{ln\left(\frac{25}{12}\right)}{9}, +\infty\right)$

2. Seja $g(x) = x - \operatorname{arctg}(x)$
   a. (0,2) Qual o domínio de g ? $\mathbb{R}$

   Determine as equações de todas as assíntotas que a curva y=g(x) possui.

   b. (0,3) assíntotas verticais: não possui
   c. (0,5) assíntotas horizontais

   $\lim_{x\to\infty} x - \operatorname{arctg}(x) = \infty$ pois $\lim_{x\to\infty} -\operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$

   $\lim_{x\to-\infty} x - \operatorname{arctg}(x) = -\infty$ pois $\lim_{x\to-\infty} -\operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$

   Portanto também não possui.

   d. (1,0) assíntotas inclinadas $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$

   como $\lim_{x\to\infty} g'(x) = \lim_{x\to-\infty} g'(x) = 1 = m$

   e $\lim\limits_{x\to\infty} x - \operatorname{arctg}(x) - x = \lim\limits_{x\to\infty} -\operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2} = b_1$

   A reta $y = x - \frac{\pi}{2}$ é assíntota inclinada da curva $y = g(x)$.

   Da mesma forma, a reta $y = x + \frac{\pi}{2}$ também é assíntota inclinada da curva $y = g(x)$ pois $\lim\limits_{x\to-\infty} x - \operatorname{arctg}(x) - x = \lim\limits_{x\to-\infty} -\operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} = b_2$

3. Calcule:

a. $arcsen\left(sen\left(\frac{61\pi}{6}\right)\right) = arcsen\left(sen\left(10\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right) = arcsen\left(sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

b. $arcsen\left(cos\left(\frac{43\pi}{3}\right)\right) = arcsen\left(cos\left(14\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = arcsen\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

c. Seja $f(x) = arcsen(x) + \arccos(x)$. Calcule $f(0{,}3)$. Sabemos que $sen(y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ e seja $sen(y) = x$ logo $y = arcsen(x)$. Da mesma forma, $\frac{\pi}{2} - y = arccos(x)$ então $f(x) = arcsen(x) + \arccos(x) = y + \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2}$ Portanto $f(0{,}3) = \frac{\pi}{2}$

Solução alternativa: observe que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ Logo $f(x)$ é constante e como $f(0) = arcsen(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ Portanto $f(0{,}3) = \frac{\pi}{2}$

4. Resolva os limites:

a. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\, ln\left(\frac{x}{x-2}\right)}$ (*)

Mas $\lim_{x\to\infty} x\, ln\left(\frac{x}{x-2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{ln\left(\frac{x}{x-2}\right)}{1/x} \overline{\overline{LHop.}} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{x-2}{x}\right)\left(\frac{x-2-x}{(x-2)^2}\right)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x\,(x-2)} = 2$

Logo o limite (*) é e^2

b. $\lim_{x\to 0^+}\left(x \cdot e^{\frac{1}{x}}\right) =$

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1/x}\right) \overline{\overline{LHop.}} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-1/x^2\right)}{-1/x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+} e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \infty$

c. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg(x)}{x^3}\right)$ Usando Lhopital pois os limites do numerador e denominador são ambos nulos, temos que $\lim_{x\to 0} \frac{(sec(x))^2}{3\,x^2} = \infty$ pois o limite do numerador é 1 e o do denominador é 0.