PUC-RIO – CB-CTC

P2 DE ELETROMAGNETISMO – 20.05.03 – terça-feira

Nome : GABARITO

Assinatura: ______________________________

Matrícula: ______________________ Turma: __________

NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.

Não é permitido destacar folhas da prova

Questão	Valor	Grau	Revisão
1ª Questão	2,5		
2ª Questão	2,5		
3ª Questão	2,5		
4ª Questão	2,5		
Total	10,0		

A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.

FKT

1ª Questão: (2.5)

Um capacitor esférico consiste em uma esfera condutora interna de raio R_1, dentro de uma casca esférica condutora concêntrica, de raio R_2. O capacitor está inicialmente submetido a uma diferença de potencial V_0 através de uma bateria. Desliga-se a seguir a bateria e remove-se o capacitor carregado.

Lembrando que a diferencia de potencial entre dois pontos A e B é definida como:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \overline{E} \cdot d\overline{s}$$

onde E é o campo elétrico :

a) **(1,0)** Determine a capacitância C_0 deste capacitor em função dos raios R_1 e R_2.

b) **(1,0)** Suponha que possamos, através de um dado mecanismo, modificar os raios das placas interna e externa dos condutores de modo a dobrar cada um desses raios. Sabendo que o capacitor, antes de ter as placas alteradas, já foi carregado nas condições do enunciado, determine a nova diferença de potencial V entre as placas em função de V_0 e também a nova capacitância C em função de C_0, após a alteração dos raios das placas.

Introduz-se no capacitor, nas condições do item a, um isolante de constante dielétrica **k**, que preenche toda a separação entre as placas condutoras.

c) **(0,25)** Determine a nova capacitância em função de C_0 e de **k**.

d) **(0,25)** Determine a diferença de energias armazenadas $U-U_0$, pelo capacitor com o dielétrico (U) e sem o dielétrico (U_0), respectivamente.

SOLUÇÃO:

a) $\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \circ d\vec{S}$

$\Delta V = -\int_{R_1}^{R_2} E_R \, dR$ (O CAMPO É RADIAL) (1)

LEI DE GAUSS: $\oint \vec{E} \circ d\vec{A} = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \oint_{S\,GAUSS} E_R \, dA = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_R \oint_{S\,GAUSS} dA = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E_R \, 4\pi R^2 = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0} \therefore E_R = \frac{q_{env}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}, \; R > R_1$

FKT

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad (2)$$

$(R_1 < r < R_2)$

SUBST. (2) EM (1):

$$\Delta V = V_{R_2} - V_{R_1} = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dr =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q}{r}\right)\Bigg|_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$V_0 = |\Delta V| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_2 \cdot R_1}, \quad R_2 > R_1$$

$$\boxed{C_0 = \frac{Q}{V_0} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2 R_1}{(R_2 - R_1)}} \quad (4)$$

b) $R_1' = 2R_1$, $R_2' = 2R_2$. A CARGA É A MESMA

$$V' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(R_2' - R_1')}{R_2' \cdot R_1'} = \frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(R_2 - R_1)}{R_2 R_1} = \frac{1}{2}V_0$$

$$C' = \frac{Q}{V'} = \frac{Q}{\frac{1}{2}V_0} = 2\frac{Q}{V_0} = 2C_0$$

c) $C'' = KC_0$

d) $U_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0} = \frac{1}{2}C_0V_0^2$; $U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C''}$ MESMA CARGA

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{KC_0} = \frac{1}{K}\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0} = \frac{1}{K}U_0.$$ ASSIM,

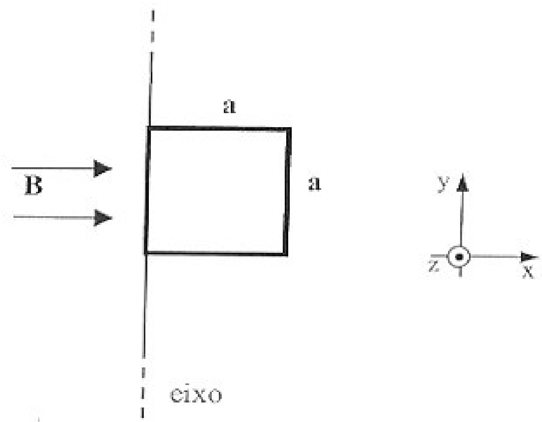
$$U - U_0 = \left(\frac{1}{K} - 1\right)U_0 = \left(\frac{1-K}{K}\right)U_0 = \frac{(1-K)}{2K}C_0V_0^2$$

A ENERGIA DIMINUI. $\boxed{\Delta U = \left(\frac{1-K}{2K}\right)\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}V_0^2}$

FKT

2.ª Questão (2.5)

Uma espira quadrada de lado **a** é colocada numa região de campo magnético **B** uniforme e constante como mostra a figura. A espira, presa a um eixo vertical, é livre para girar, isto é, não existe atrito entre a espira e o eixo.



Neste caso, determine :

a) **(0,5)** A direção e o sentido da corrente na espira para que a espira gire no sentido anti-horário (vista de cima).

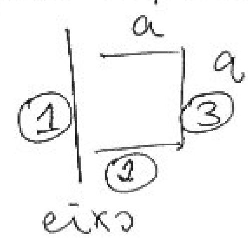
b)**(1,0)** Se uma corrente I_0 passa na espira no sentido anti-horário, determine o valor do torque máximo na espira.

c)**(1,0)** Se num certo instante o ângulo entre o campo magnético **B** e o plano da espira é : $\phi=\pi/4$, calcule o torque τ na espira neste instante.

FKT

a) Para que a espira gire no sentido anti-horário, em torno do eixo, quando vista de cima, temos que o torque $\vec{\tau}$ atuando na espira deve ser na direção $\hat{j}$. Para tal, a força atuando na espira deve ser na direção $-\hat{k}$.

Para que $\vec{F}$ seja na direção $-\hat{k}$ temos que o vetor $I\vec{\ell} = \vec{I}.\ell$ deve ter a direção e sentido $+\hat{j}$ no ramo 3 da espira. Logo a corrente na espira deve ser ~~na direção~~ $\boxed{\text{anti-horária.}}$



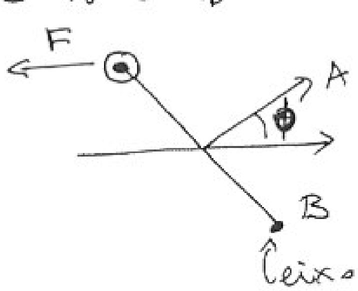
b)

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ logo $|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}|\,\text{sen}\,\theta$

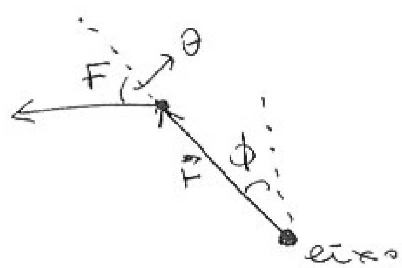
Neste caso, $\tau = a\,|\vec{F}|\,\text{sen}\,\theta$ onde

$|\vec{F}| = I\,|\vec{\ell}|\,|\vec{B}|\,\text{sen}\,90^\circ = I\,a\,B$ ∴ Note que o ângulo entre $\vec{\ell}$ e $\vec{B}$ no ramo 3, único que contribui para o $\vec{\tau}$ é sempre de $\pi/2$! Então $\boxed{\tau = I a^2 B}$

c) Vista de cima. Temos que quando o ângulo entre $\vec{B}$ e $\vec{A}$ é de $\pi/4$ tem:



então



$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = |\vec{r}||\vec{F}|\,\text{sen}\,\theta = a\,I\,a\,B\,\text{sen}\,\pi/4\ \hat{j}$

$\boxed{\vec{\tau} = I a^2 B \sqrt{2}/2\ \hat{j}}$

3.ª Questão (2.5)

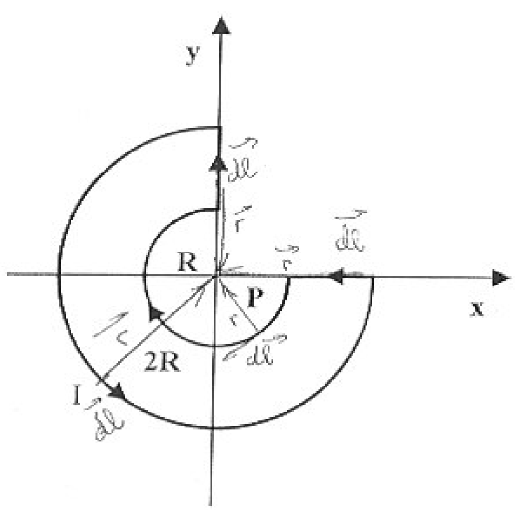
O circuito da figura abaixo é formado por dois arcos de círculo de raios R e $2R$ e dois fios retilíneos de comprimento R, como ilustrado. Os arcos formam um setor de ângulo $\theta = 3\pi/2$. O circuito é percorrido por uma corrente de intensidade I. Calcule, justificando, a contribuição de cada segmento para o campo magnético (módulo direção e sentido) no ponto P, centro do setor circular:

(a) **(0,5)** $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$, contribuição dos segmentos retilíneos.

(b) **(1,0)** $\vec{B}_3$, contribuição do arco de raio R.

(c) **(0,5)** $\vec{B}_4$, contribuição do arco de raio $2R$.

(d) **(0.5)** Calcule o campo magnético total $\vec{B}$ no ponto P, para uma corrente de 1,0 A e R igual a 10 cm. (Dê sua resposta em Gauss, sendo 1 G = 10^{-4} T)



a) Biot Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2}$$

$B_1 = B_2$ são nulos pois $\vec{dl} \parallel \hat{R}$ nos dois segmentos
$\theta = 0$ no segmento sob o eixo x e
$\theta = \pi$ no segmento sob o eixo y.

b) $$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl}{R^2} (-\hat{z})$$

$$= -\hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{3\pi/2} \frac{\cancel{R}\, d\theta}{R^{\cancel{2}}} = -\hat{z} \frac{3}{8} \frac{\mu_0 I}{R}$$

c) No arco de raio $2R$, $\vec{dl} \times \hat{r}$ tem sentido de $\hat{z}$

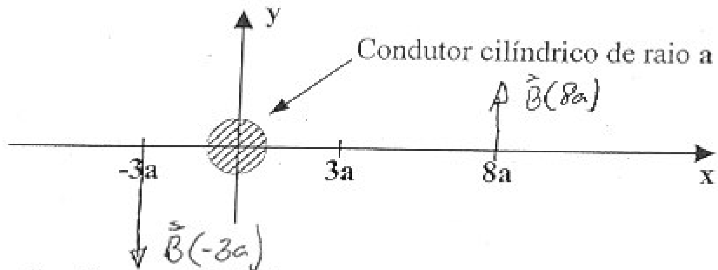
$$\vec{B}_4 = \hat{z} \frac{3}{8} \frac{\mu_0 I}{2R} = \hat{z} \frac{3}{16} \frac{\mu_0 I}{R}$$

d) $$\vec{B} = \vec{B}_3 + \vec{B}_4 = \frac{3}{8} \frac{\mu_0 I}{R} \left(-1 + \frac{1}{2}\right) \hat{z} = -\frac{3}{16} \frac{\mu_0 I}{R} \hat{z}$$

$$|\vec{B}| = \frac{3}{\cancel{16}_{\,4}} \frac{\cancel{4}\pi \times 10^{-7}}{10^{-1}} T = \frac{3\pi}{4} \times 10^{-6} T = \frac{3\pi}{4} \times 10^{-2} G$$

4ª Questão (2.5)

A figura abaixo mostra um corte transversal de um condutor cilíndrico, maciço, muito longo e de raio a, percorrido por uma corrente I, uniformemente distribuída e com sentido z, saindo do papel.



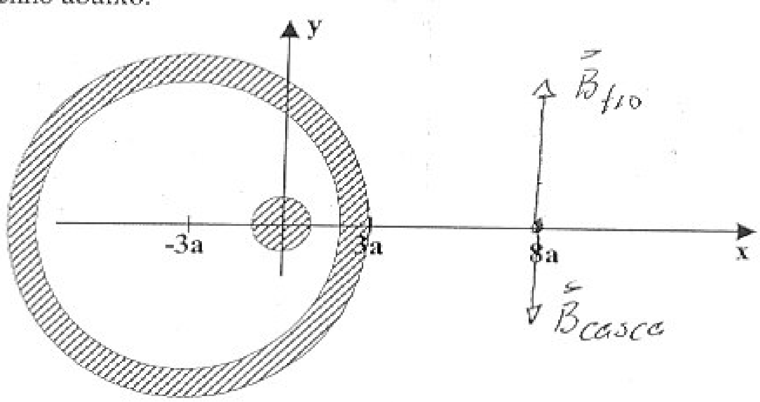
a) **(0,5)** Qual é a direção e o sentido do campo magnético nos pontos do eixo x cujas coordenadas são: $-3a$ e $8a$? Justifique o porque deste sentido do campo.

$\vec{B}(-3a) \parallel (-\hat{y})$ e $\vec{B}(8a) \parallel (+\hat{y})$. A circulação de $\vec{B}$ pode ser obtida pela regra da mão direita com o dedão apontando no sentido da corrente

b) **(1,0)** Calcule o valor do campo magnético nestes dois pontos. Justifique as considerações mais importantes levadas em consideração neste seu cálculo.

(ver folha anexa)

Agora coloca-se uma casca cilíndrica condutora, com centro em x= $-3a$, raio interno **$5a$** e externo **6a**, percorrida por uma corrente I, uniformemente distribuída e com sentido **$-z$**, entrando no papel, envolvendo o condutor cilíndrico da figura anterior conforme desenho abaixo.



c) **(0,5)** Calcule o novo valor do campo magnético no ponto do eixo x de coordenada **$-3a$**. Justifique.

(ver folha anexa)

d) **(0,5)** Calcule o novo valor do campo magnético no ponto do eixo x de coordenada **$8a$**. Justifique.

(ver folha anexa)

FKT

b) Como dito no item a) o campo $\vec{B}(r)$ circula no sentido anti-horário e o módulo do campo é constante para todos os pontos situados a mesma distância r do condutor portanto da lei de Ampere temos

|B| constante sobre todos o elementos $d\vec{l}$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint |\vec{B}||d\vec{l}|\cos 0 = |\vec{B}|\int |d\vec{l}| = |\vec{B}|(2\pi r)$$

para $d\vec{l}$ no sentido anti-horário

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = |\vec{B}|(2\pi r) = \mu_0 I \quad \text{logo} \quad |\vec{B}(r)| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

logo $\vec{B}(-3a) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(3a)}(-\hat{y})$ e $\vec{B}(8a) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(8a)}(+\hat{y})$

c) O campo resultante no ponto (-3a) pode ser obtido pela superposição do campo da casca com o campo do condutor cilíndrico. Portanto basta calcularmos o campo da casca.

$\oint \vec{B}_{casca}\, d\vec{l} = 0$ para qualquer circuito virtual no interior da casca, em particular, para um circuito circular com centro, também, em -3a teremos que o $|\vec{B}_{casca}|$ será constante sobre todos os $d\vec{l}$s pois $|\vec{B}_{casca}(r)|$ é invariante pela rotação da casca. Logo:

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = |\vec{B}|\int |d\vec{l}|\cos\theta = 0$ como $\int |d\vec{l}|\cos\theta \neq 0$ isto implica que $|\vec{B}_{casca}| \equiv$ ZERO

Portanto $\vec{B}_T = \vec{B}_{fio} + \vec{B}_{casca} = \vec{B}_{fio} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(3a)}(-\hat{y})$

d) De modo analogo teremos que

$$\oint \vec{B}_{casca} \cdot d\vec{l} = |\vec{B}(8a)| \underbrace{\oint |d\vec{l}| \cos 0}_{\text{com sentido horario}} = |\vec{B}(8a)| \big(2\pi \underbrace{(8a+3a)}_{\text{circulo de raio }(11a)}\big) = \mu_0 I$$

logo $\vec{B}_{Total} = \vec{B}_{fio} + \vec{B}_{casca} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(8a)}(+\hat{y}) + \frac{\mu_0 I}{2\pi(11a)}(-\hat{y})$

$$\vec{B}_{Total} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(\frac{3}{88}\right)(+\hat{y})$$

FKT