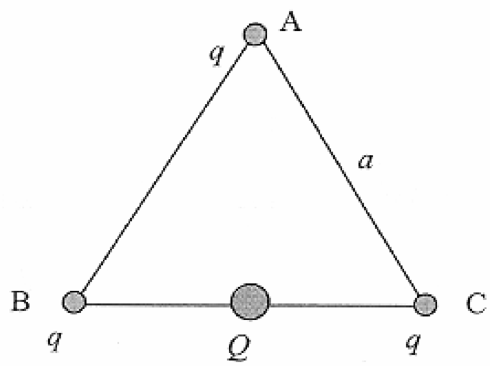
1ª Questão: (2.0)

A figura mostra um triângulo eqüilátero ABC de lado a. Uma carga puntiforme positiva q é colocada em cada um dos vértices do triângulo. Uma carga puntiforme de valor Q é colocada a meio caminho entre B e C.



(a) **(1.0)** É possível encontrar um valor – **não nulo** - para Q tal que a força **F** sobre essa carga seja zero? **Justifique sua resposta**, qualquer que seja.

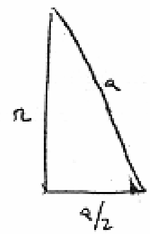
(b) **(1.0)** Encontre uma expressão para o valor e o sinal da carga Q, tais que a **força líquida** sobre a carga no vértice A seja igual a zero.

1º) Questão

$$\vec{F}_a = -\frac{kqQ}{r^2}\hat{j}$$

$$\vec{F}_B = +\frac{kqQ}{(a^2/4)}\hat{i}$$

$$\vec{F}_c = -\frac{kQ}{(a^2/4)}\hat{i}$$



$$a^2 = \frac{a^2}{4} + r^2$$

$$r^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow \boxed{\frac{a\sqrt{3}}{2} = r}$$

(a) Não é possível, porque a força $\vec{F}_A$ tem componente não-zero na direção vertical

---

(b) $F_A = -\frac{kqQ}{r^2}\hat{j}$ $\qquad F_B = \frac{kq^2}{a^2}\cos\theta\,\hat{j}$ $\qquad F_C = \frac{kq^2}{a^2}\cos\theta\,\hat{j}$

Q deve ser negativa pois as cargas em B e C dão contribuição segundo a direção do eixo y positivo.

$$(F_B + F_C) = \frac{2kq^2}{a^2}\cos\theta \quad ; \quad \cos\theta = \frac{r}{a} \Rightarrow \boxed{F_B + F_C = 2kq^2\frac{r}{a^3}}$$

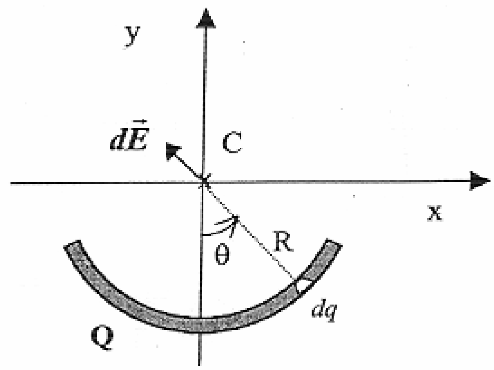
que deve ser igual à F_A : $2kq^2\frac{r}{a^3} = -\frac{kqQ}{r^2} \Rightarrow$

$$Q = -2q\frac{r^3}{a^3} \qquad r^3 = \frac{a^3\,3\sqrt{3}}{8}$$

$$Q = -\frac{2q\,a^3 \cdot 3\sqrt{3}}{a^3\;8} = \left[-q\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$$

questão (2,5 pontos)

Um bastão, com carga $\boldsymbol{Q}$ uniformemente distribuída ao longo de seu comprimento, foi dobrado em forma de arco de circunferência com raio de curvatura $\boldsymbol{R}$ e ângulo de **120°** ($2\pi/3$), conforme mostra a figura abaixo.

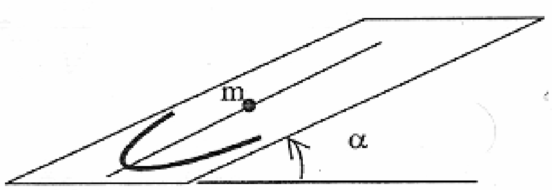


(a) Calcule a densidade linear de carga λ do bastão curvo. (0,5)

(b) Escreva a expressão do campo $d\vec{E}$ no ponto C (centro de curvatura), devido à carga dq indicada na figura, em função de λ, R e dθ. Indique, no desenho, a direção e o sentido de $d\vec{E}$. (0.5)

(c) Obtenha o vetor campo elétrico, $\vec{E}$, no centro de curvatura C. (1,0)

(d) Coloca-se o bastão curvo sobre um plano inclinado de um ângulo α, conforme a figura abaixo. Uma bolinha de massa m pode movimentar-se ao longo de uma calha, nesse plano inclinado. Que carga q deve ter a bolinha para que fique em equilíbrio no centro de curvatura do bastão? (0,5)



(a) $$\lambda = Q/\ell = \frac{Q}{R.2\pi/3} = \frac{3Q}{2\pi R}$$

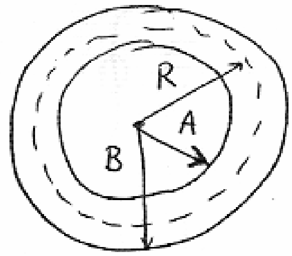
(b) $$d\vec{E} = k\frac{dq}{R^2}\hat{r} = k\frac{\lambda\, d\ell}{R^2}\hat{r} = k\frac{\lambda\, R\, d\theta}{R^2}\hat{r} = k\frac{\lambda\, d\theta}{R}\hat{r}$$

(c) $\vec{E}$ resultante vai ter direção do eixo y, já que as componentes dE_x devido a cargas simétricas se anulam.

$$dE_y = k\frac{\lambda\, d\theta}{R}\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad E_y = k\int_{-60°}^{60°}\frac{\lambda\, d\theta}{R}\cos\theta = \frac{k\lambda}{R}\left[sen60° - sen(-60°)\right]$$

$$E = k\frac{\sqrt{3}\lambda}{R} = k\frac{3\sqrt{3}\,Q}{2\pi R^2} \qquad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\frac{kQ}{R^2}\vec{j}$$

(d) $$mg\, sen\,\alpha = qE \qquad \Rightarrow \qquad q = \frac{2\pi R^2\, mg\, sen\,\alpha}{3\sqrt{3}\, kQ}$$



Por Gauss: $\oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$ na sup. gaussiana de raio R

$\Rightarrow$ $\bar{E} \parallel d\bar{A} \Rightarrow \bar{E} d\bar{A} = E\, dA$ e E é unif. e const. sobre a sup. gauss.

$$\Rightarrow \oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = \oint E_R\, dA = E_R \oint dA = E_R\, 4\pi R^2 = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

$Q_i = ?$ $\quad Q_i = \frac{4}{3}\pi (R^3 - A^3) \cdot \rho$

$\rho = \frac{Q}{V}$ $\quad V =$ volume da casca até $r = R = \frac{4}{3}\pi (R^3 - A^3)$

$$Q_i = \frac{4}{3}\pi (R^3 - A^3)\rho$$

$$\Rightarrow E_R\, \cancel{4\pi} R^2 = \frac{\cancel{4}\,\cancel{\pi}\rho}{3\,\epsilon_0}(R^3 - A^3)$$

$$\boxed{\rho = \frac{3\epsilon_0 E_R R^2}{(R^3 - A^3)}}$$

$$\phi = \oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$ desta vez:

$$Q_i = \rho \cdot V_{casca} = \frac{4}{3}\pi\left(B^3 - A^3\right) \cdot \rho$$

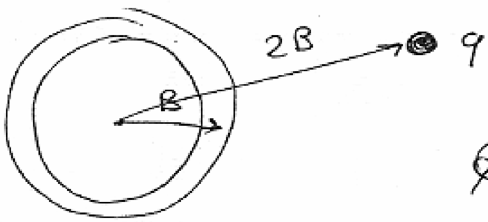
$\frac{4}{3}\pi\left(B^3 - A^3\right)$ → volume tot. casca esférica

$$\phi = \frac{4\pi}{3\epsilon_0}\rho\left(B^3 - A^3\right)$$

ou $$\phi = \frac{4\pi}{\cancel{3\epsilon_0}}\left(B^3 - A^3\right) \cdot \frac{\cancel{3\epsilon_0} E_R R^2}{\left(R^3 - A^3\right)}$$

---

c)



$$\phi_e = ?$$

Por Gauss: $\phi_e = \frac{Q_i'}{\epsilon_0}$ onde $Q_i' = +q + \rho \cdot V_{casca}$

$$Q_i' = q + \frac{4}{3}\pi\rho\left(B^3 - A^3\right)$$

$$\phi_e = \frac{1}{\epsilon_0}\left[q + \frac{4}{3}\pi\rho\left(B^3 - A^3\right)\right]$$

d) No interior da casca esférica para $r < A$ temos que $\bar{E} = 0$.

Portanto se a carga q é posicionada em $r = 0$ a força sobre ela será:

$$\bar{F}_q = q \cdot \bar{E} = \bar{0}$$

e pela terceira lei de Newton, também a força que a carga exerce sobre a casca esférica

$4^{\underline{a}}$ Questão (3.0)

Sabendo-se que o potencial eletrostático no centro de um anel condutor de raio $R = 1.0\,m$ é $10\,V$:

1) **(1,0)** calcule a carga líquida Q do anel supondo que esta carga está uniformemente distribuída ao longo do comprimento do anel.

$$dV = \frac{k\,dq}{R} \qquad V = \int dV$$

$$V = \int \frac{k\,dq}{R} \qquad V = \frac{kQ}{R}$$

$$Q = \frac{RV}{K} \qquad \boxed{Q = 1{,}1\,nC}$$

2) **(0,5)** Mostre que a superfície de um condutor é uma superfície equipotencial

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

como $d\vec{s} \perp \vec{E}$ tem-se $\Delta V = 0$!

na superfície do condutor $\vec{E}$ é sempre perpendicular a essa superfície. Consequentemente qualquer deslocamento de uma carga sobre essa superfície será perpendicular ao campo $\vec{E}$.

3) **(1,0)** Suponha agora que seja criada uma distribuição de cargas cujo campo elétrico sobre o eixo x seja $\vec{E}(x) = \dfrac{kQR}{x^3}\,\hat{i}$. Calcule o trabalho do campo elétrico sobre uma carga q que se desloca do infinito até $x = R$.

$$W = \int_{\infty}^{R} q\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$W = kQRq \int_{\infty}^{R} \frac{dx}{x^3}$$

$$W = kqQR \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \Bigg|_{\infty}^{R}$$

$$W = -\frac{kqQ\cancel{R}}{2R^{\cancel{2}}} \Rightarrow W = -kqQ/2R$$

$$\boxed{W = kqQ/2R}$$

4) **(0,5)** Dado o potencial $V(x,y) = -2kQR\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right)$ determine o vetor campo elétrico em função de x e y.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-2kQR\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)\right) \Rightarrow$$

$$E_x = -(-2kQR)\left(-2/x^3\right) = -4kQR/x^3$$

$$E_y = -4kQR/y^3$$

$$\boxed{\vec{E}(x,y) = -4kQR\left(\frac{1}{x^3}\,\hat{i} + \frac{1}{y^3}\,\hat{j}\right)}$$