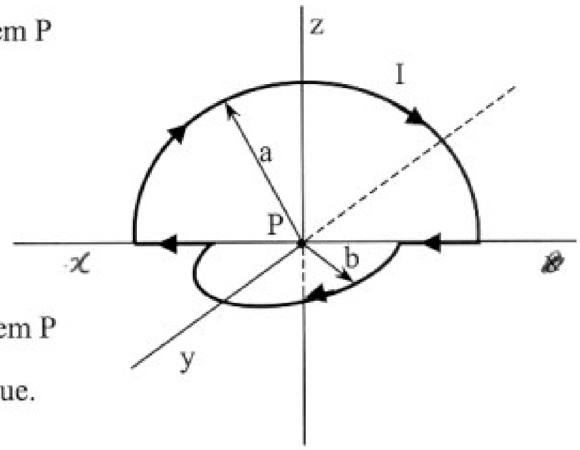
1ª Questão:

Um fio condutor é dobrado com a geometria que aparece na figura formando 2 semi-círculos de raios **a** e **b**. O primeiro semi-círculo está no **plano xz** e o segundo no **plano xy**. O condutor é percorrido por uma corrente **I** como indicado na figura.



a) (0,7) Calcule o campo magnético $\vec{B}_1$ na origem P devido ao semi-círculo de raio **a.** Justifique.

b) (0,7) Calcule o campo magnético $\vec{B}_2$ na origem P devido ao semi-círculo de raio **b.** Justifique.

c) (0,5) Calcule o campo magnético $\vec{B}_3$ na origem P devido aos dois segmentos retilíneos. Justifique.

d) (0,5) Calcule o campo magnético $\vec{B}_T$ total na origem P.

e) (0,6) Considere agora uma partícula de carga positiva Q. Calcule a força magnética $\vec{F}_m$ sobre a partícula quando ela passa pela origem P, sabendo que nesse instante a sua velocidade é dada por $\vec{v} = v_0 \cdot \hat{x}$ onde v_0 é uma constante.

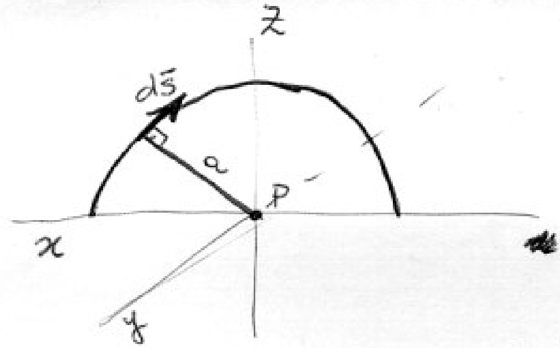
A questão pode ser resolvida utilizando a lei de Biot - Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

aplicada em cada segmento da figura. Neste caso I é a corrente que circula, $d\vec{s}$ é o elemento de condutor considerado e r a distância deste elemento do ponto P no qual o campo ~~deve~~ magnético deve ser calculado.

FKT

a)



$d\bar{s}$ é perpendicular a $|\bar{r}| = a$

$$\Rightarrow \quad d\bar{s} \times \hat{r} = ds\,(-\hat{y}) \qquad ds = a\,d\theta$$

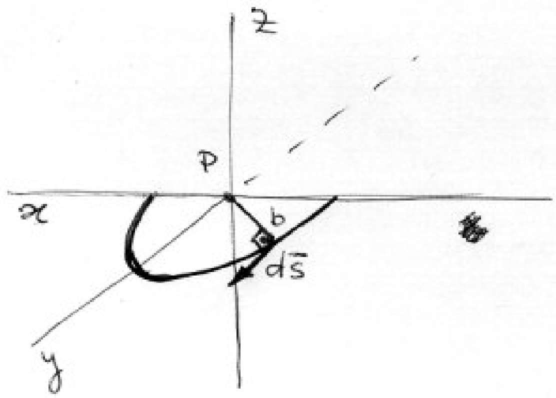
$$|d\bar{B}_1| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{ds}{a^2} \quad \Rightarrow \quad |\bar{B}_1| = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\int_0^{\pi} ds$$

$$|\bar{B}_1| = \frac{\mu_0 I}{4\cancel{\pi} a^{\cancel{2}}}\,\cancel{\pi}\cancel{a} = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

$$\bar{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4a}\,(-\hat{y})$$

---

b)



Também neste caso: $d\bar{s}$ é perpendicular a $|\bar{r}| = b$.

Por isso:

$$d\bar{s} \times \hat{r} = ds\,(-\hat{z}) \qquad ds = b\,d\theta$$

$$|d\bar{B}_2| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{ds}{b^2} \quad \Rightarrow \quad |\bar{B}_2| = \frac{\mu_0 I}{4\pi b^2}\int_0^{\pi} ds$$

$$|\bar{B}_2| = \frac{\mu_0 I}{4\cancel{\pi} b^{\cancel{2}}}\,\cancel{\pi}\cancel{b} = \frac{\mu_0 I}{4b}$$

c) No caso dos dois segmentos retilíneos temos que:

$d\bar{s}$ ~~é~~ é paralelo a $\hat{r}$ e por isso:

$$d\bar{s} \times \hat{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{B}_3 = \hat{0}$$

Então os dois segmentos retilíneos não contribuem ao campo total $\bar{B}_T$ em P.

d)

$$\bar{B}_T = \bar{B}_1 + \bar{B}_2 + \bar{B}_3$$

$$\bar{B}_T = \frac{\mu_0 I}{4\,a}(-\hat{y}) + \frac{\mu_0 I}{4\,b}(-\hat{z}) + \hat{0} = \frac{\mu_0 I}{4}\left[-\frac{1}{a}\hat{y} - \frac{1}{b}\hat{z}\right]$$

Para calcular a força magnética $\bar{F}_m$ sobre a partícula de carga $+Q$ quando ela passa pela origem P, vamos aplicar a relação:

$$\bar{F}_m = Q\,\bar{v} \times \bar{B}$$

onde:

$$\bar{v} = v_0\,\hat{x}$$

$$\bar{B} = \bar{B}_T = \frac{\mu_0 I}{4}\left[-\frac{1}{a}\hat{y} - \frac{1}{b}\hat{z}\right]$$

$$\bar{F}_m = \frac{Q\mu_0 I}{4}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b} \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 I Q}{4}\left[\frac{v_0}{b}\hat{y} - \frac{v_0}{a}\hat{z}\right]$$

$$\bar{F}_m = \frac{Q\mu_0 I}{4} v_0 \left(\frac{\hat{y}}{b} - \frac{\hat{z}}{a}\right)$$

2ª Questão:

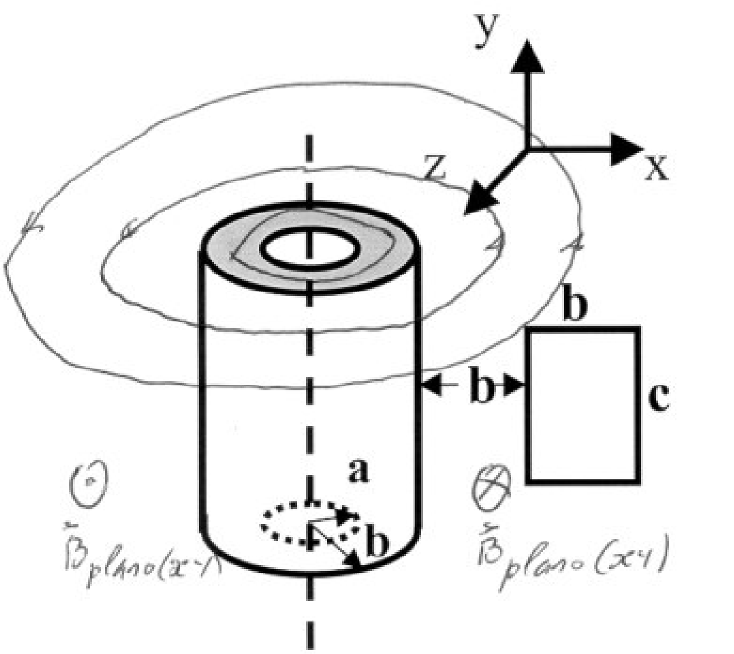
Um tubo cilíndrico oco muito longo, de raio interno **a** e raio externo **b**, é percorrido por uma corrente **não uniforme I_0**. Sua densidade de corrente é dada pela expressão $j(r) = \alpha \cdot r\,(\hat{y})$, onde r é a distância ao eixo central e α uma constante.

(0,2) (a) Desenhe algumas linhas de campo, justificando o seu desenho. Indique, no **plano xy** (plano da folha), o sentido do campo em todo o espaço da figura.

(0,3) (b) Escolha o seu circuito de integração e escreva a lei de Ampère para o caso em que r é externo ao tubo cilíndrico (r > b). Justifique.

(0,8) (c) Calcule o módulo do campo magnético na região em que r > b. Justifique detalhadamente os seus passos.

(0,6) (d) Calcule o módulo do campo magnético na região em que a < r < b. Justifique detalhadamente os seus passos.



(0,6) (e) Calcule o módulo do campo magnético na região em que r < a. Justifique detalhadamente os seus passos.

(0,5) (f) Calcule o fluxo magnético na espira retangular mostrada em figura.

(0,5) (g) Qual o sentido da corrente induzida na espira (se horário ou anti-horário) quando α, dado na expressão de $j(r) = \alpha \cdot r\,(\hat{y})$, diminui com o tempo na forma $\alpha(t) = e^{kt}$ onde k é uma constante positiva. Justifique detalhadamente o seu raciocínio.

(a) As linhas de campo circulam em torno do eixo do cilindro. Seu sentido de circulação é tal que elas no plano (x-y) a direita do eixo do cilindro (sentido $(-\hat{z})$) e saem do plano a esquerda do eixo (sentido $(\hat{z})$). Dito de outra forma $\vec{B}$ tem o sentido $\hat{\theta}$.

(b) Escolhendo um circuito de integração circular, centrado no eixo do cilindro, teremos que o módulo de $\vec{B}$ será constante neste circuito

Escolhendo o circuito de integração com sentido igual ao de $\vec{B}$ teremos que $\vec{B} = |\vec{B}|\hat{\theta}$ e $\vec{dl} = |\vec{dl}|\hat{\theta}$

Logo $\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_o \int \vec{J}.\vec{dS}$ poderá ser escrita

como:

$$\int |\vec{B}||\vec{dl}|\,\hat{\theta}.\hat{\theta} = \mu_o \left\{ \int_{r=0}^{r=a} 0.\vec{dS} + \int_{r=a}^{r=b} \left[f(r)(\hat{y})\right].\left[|\vec{dS}|(\hat{y})\right] + \int_{r=b}^{r=r} 0.\vec{dS} \right\}$$

ou $\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_o I_o$ pois I_o é a corrente total que atravessa a superfície definida pelo circuito escolhido.

(c) Para $(r > b)$ teremos

$$\oint |\vec{B}||\vec{dl}| = |\vec{B}| \int |\vec{dl}| = |\vec{B}|(2\pi r) = \mu_o I_o = \mu_o 2\pi\alpha \int_a^b r^2 dr$$

$|\vec{B}|$ é constante neste circuito escolhido

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_o I_o}{2\pi r} = \frac{\mu_o \alpha}{3} \frac{(b^3 - a^3)}{r}$$

FKT

(d) Para $a < r < b$ teremos

$$|\vec{B}|(2\pi r) = \mu_0 \int_{r=a}^{r=r} \vec{J}(r) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \, 2\pi\alpha \int_0^r r^2 dr = \frac{\mu_0 2\pi\alpha}{3}(r^3 - a^3)$$

Então $$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 \alpha}{3} \frac{(r^3 - a^3)}{r}$$

(e) Para $r < a$ teremos

$$|\vec{B}|(2\pi r) = \mu_0 (ZERO) \quad \therefore \quad |\vec{B}| = ZERO$$

(f) $$\phi_{espira} = \int \vec{B}_{Tubo} \cdot d\vec{S}_{espira} = \int |\vec{B}| \hat{\theta} \cdot |d\vec{S}| \hat{\theta} = \int_{2b}^{3b} \left(\underbrace{\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}}_{\{\text{com } r \equiv x\}} \right) c \, dx \, (\hat{\theta} \cdot \hat{\theta})$$

$$\phi_{espira} = \frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi} \int_{2b}^{3b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

(g) Se a corrente diminui no tempo temos

que $\frac{dI_{Tubo}}{dt} < 0$ logo $I_{nd} = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\phi}{dt} = -\frac{M}{R}\frac{dI_{Tubo}}{dt}$

, onde M é uma constante, teremos que $I_{induzido} > 0$

Isto significa que $I_{induzido}$ está no sentido horário

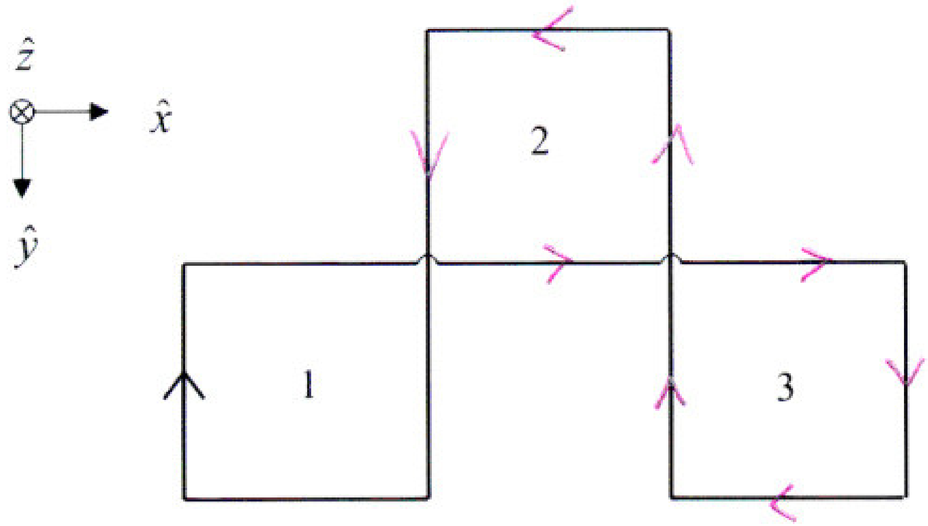
(mesmo sentido de $d\vec{l}_{espira}$ definido pelo $d\vec{S}_{espira}$.

OU: I_{Tubo} diminui então $\vec{B}_{Tubo}$ diminui e $\vec{B}_{ind.\,espira}$ têm o mesmo sentido de $\vec{B}_{Tubo}$ logo $I_{induzido}$ no sentido horário

FKT

3ª Questão

Um fio condutor é dobrado na forma de um circuito fechado como na figura abaixo, formando no **plano xy** três espiras quadradas de lado l. O campo magnético nessa região do espaço é dado por $\vec{B} = -\alpha t^2\,\hat{y} + \beta t\,\hat{z}$, onde α e β são constantes positivas e t representa o tempo. Os segmentos do fio não se tocam nos pontos de cruzamento. Cada pedaço de comprimento l do fio tem resistência R_0.



a)(0,2) O sentido escolhido para o circuito está representado no trecho 1 da figura. Represente (na figura acima) o sentido para o circuito, de maneira consistente, nos trechos 2 e 3.

b)(0,3) Na área delimitada pelo trecho 1 o elemento de área orientado pode ser escrito como $d\vec{A} = dA\;\hat{z}$. Quais as expressões equivalentes para $d\vec{A}$ nos quadrados 2 e 3 ?

c)(1,0) Calcule o fluxo magnético total através do sistema. Justifique.

d)(1,0) Calcule a força eletromotriz total ao longo do circuito. Justifique.

e)(0,5) Calcule a corrente que percorre o circuito. Justifique.

f)(0,5) Se o sistema da figura for colocado no **plano yz** a sua auto-indutância irá mudar ? Se com o mesmo fio for feita uma única espira quadrada de lado 3 l, a auto-indutância do sistema irá mudar ? Justifique as duas respostas.

FKT

a) Na figura

b) $2 \rightarrow d\bar{A} = dA(-\hat{z})$

$3 \rightarrow d\bar{A} = dA\ \hat{z}$

c) $$\phi_m = \int \bar{B} \cdot d\bar{A}$$

$$= \int_1 \bar{B} \cdot \hat{z}\, dA + \cancel{\int_2 \bar{B} \cdot (-\hat{z})\, dA} + \cancel{\int_3 \bar{B} \cdot \hat{z}\, dA}$$

$$= \int_1 \left(-\alpha t^2 \hat{y} + \beta t \hat{z}\right) \cdot \hat{z}\, dA = -\alpha t^2 \int_1 \cancelto{0}{\hat{y} \cdot \hat{z}}\, dA + \beta t \int_1 \cancelto{1}{\hat{z} \cdot \hat{z}}\, dA$$

$$= \beta t \int_1 dA = \beta t \ell^2$$

d) $$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\beta t \ell^2\right) = -\beta \ell^2$$

e) $$i = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = -\frac{\beta \ell^2}{12 R_0}$$

f) Colocando o sistema no plano yz a autoindutância não muda. Fazendo uma nova espira de lado 3ℓ a autoindutância muda. A autoindutância só depende da geometria da espira.