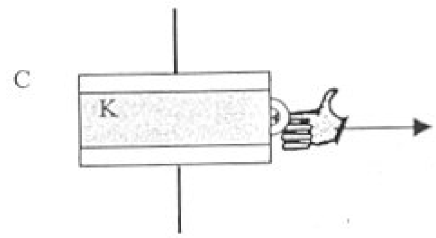
P2 2002.1

1ª questão (1,5 pontos)

Um capacitor de placas paralelas, que no vácuo tem capacitância $C_o = 2 \times 10^{-12}$ F, possui um bloco de material isolante com constante dielétrica $\kappa = 3$ preenchendo o volume entre as placas. Suponha que o capacitor seja carregado por uma bateria de 10 V e em seguida desligado da bateria.

0,5 (a) Calcule a carga do capacitor e a energia armazenada.

1,0 (b) Suponha que o bloco pode mover-se sem atrito para os lados e que alguém puxe o bloco, retirando-o totalmente. Calcule a nova energia armazenada e obtenha o trabalho realizado pela pessoa.



a) $C = KC_o$; $C = \frac{Q}{V}$

$Q = KC_oV = 3 \times 2\times10^{-12} \times 10 = 6\times10^{-11}$ C

$U = \frac{1}{2} C V^2 = 3\times10^{-12} \times 10^{2} = 3\times10^{-10}$ J

b) Bateria desligada ⇒ carga é a mesma

$U' = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_o} = \frac{1}{2}\frac{36\times10^{-22}}{2\times10^{-12}} = 9\times10^{-10}$ J

O trabalho é igual à variação de energia potencial

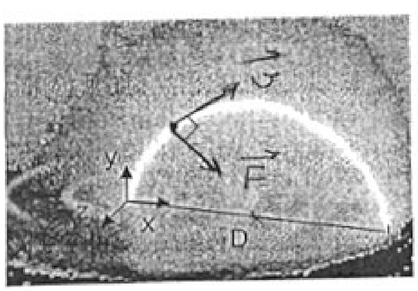
$W = U' - U = 6\times10^{-10}$ J

2ª questão (1,0 pontos)

A curva clara da figura abaixo é a trajetória de um feixe de elétrons (carga $-e$, massa m) num campo magnético.

0,5 (a) Trace os vetores velocidade ($\vec{v}$) e força ($\vec{F}$) sobre um elétron no ponto indicado na figura. Diga, justificando, qual a direção e o sentido do campo magnético $\vec{B}$ que atua sobre o elétron.

0,5 (b) Aplicando-se um campo magnético $B = 0{,}2$ mT, encontrou-se que elétrons com velocidade $v = 1{,}8 \times 10^6$ m/s atingiam uma distância D = 10 cm. Encontre a expressão para e/m (razão entre carga elementar e massa do elétron) e calcule-a.



a) $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = -e\,\vec{v}\times\vec{B}$

$\vec{v}$ e $\vec{F}$ estão sempre no plano xy. Logo $\vec{B}$ tem direção z. Para $\vec{v}\times\vec{B}$ ter sentido contrário a $\vec{F}$, $\vec{B}$ deve ter sentido $(-\hat{z})$.

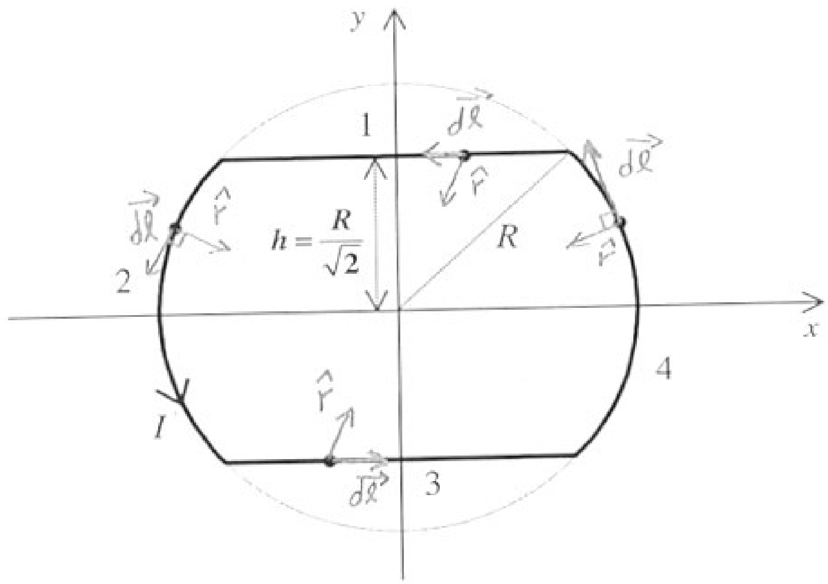
b) $\vec{F}$ força centrípeta $\quad e\cancel{v}B = m\frac{v^{\cancel{2}}}{R}$

logo $\frac{e}{m} = \frac{v}{RB} = \frac{2v}{DB} = \frac{\cancel{2}\times1{,}8\times10^{6}}{\cancel{2}\times10^{-1}\times10^{-3}\times10^{-1}} = 1{,}8\times10^{11}$ C/kg

2ª Questão:

A espira representada na figura abaixo está no plano x-y e é percorrida por uma corrente I. Ela é composta por dois segmentos circulares de raio R, com centro na origem, e por dois segmentos lineares eqüidistantes do eixo x (com $h = R/\sqrt{2}$).

a)



a) (0,5) Há 4 pontos representados sobre a espira. Sobre cada um deles desenhe os vetores $\vec{dl}$ e $\hat{r}$ relativos ao cálculo de $\vec{B}$ na origem através da lei de Biot-Savart.

b) (0,5) O campo magnético na origem gerado pelo segmento 1 é dado por:

$$\vec{B}_1 = (\mu_0 I / 2\pi R)\ \hat{z}$$

Qual a soma dos campos magnéticos gerados pelos dois segmentos lineares (1 e 3) na origem. Justifique.

c) (1,5) Calcule, a partir da lei de Biot-Savart, o campo magnético $\vec{B}$ gerado na origem pelos segmentos circulares (2 e 4).

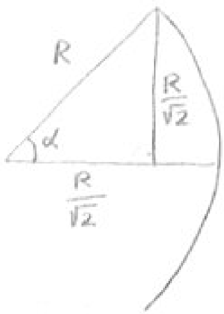
b) PARA CADA ELEMENTO NO SEGMENTO 1 COM $\vec{d\ell}_1$ e $\hat{r}_1$ TEMOS NO SEGMENTO 3 UM ELEMENTO COM $\vec{d\ell}_3 = -\vec{d\ell}_1$ E $\hat{r}_3 = -\hat{r}_1$. LOGO, $\vec{d\ell}_3 \times \hat{r}_3 = \vec{d\ell}_1 \times \hat{r}_1$.

DA LEI DE BIOT-SAVART: $\vec{dB}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{d\ell}_3 \times \hat{r}_3}{R^2} = \vec{dB}_1$

$\Rightarrow \quad \vec{B}_3 = \vec{B}_1 \quad$ E $\quad \boxed{\vec{B}_1 + \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{\pi R}\ \hat{z}}$

c) $\vec{B_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{d\ell} \times \hat{r}}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{|\vec{d\ell}||\hat{r}| \sin 90^\circ \hat{z}}{R^2}$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{z} \int \frac{R\,d\theta}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \hat{z} \int d\theta = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi R} \hat{z}$$



$$R^2 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ RAD}$$

$$\theta = 2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\vec{B_2} = \frac{\mu_0 I}{8R} \hat{z}}$$

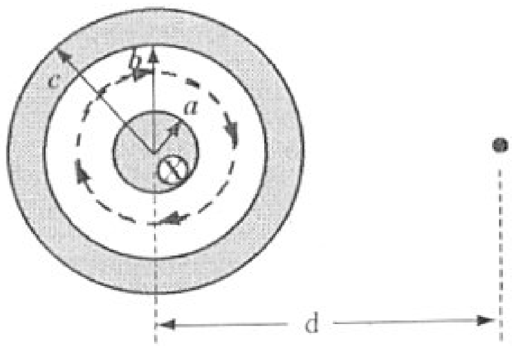
$\vec{B_4} = \vec{B_2}$ (MESMO $\vec{d\ell} \times \hat{r}$, MESMO R, MESMO θ)

$$\vec{B_2} + \vec{B_4} = 2\vec{B_2} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4R} \hat{z}}$$

4ª Questão (2,5 pontos) :

A figura abaixo mostra um corte transversal de um cabo coaxial, em que um condutor longo de raio a é envolvido por uma camada isolante (região entre os raios a e b) e por outra camada condutora (região entre os raios b e c). O condutor interno é percorrido por uma corrente I, uniformemente distribuída e com sentido **entrando** no papel. A casca condutora externa é percorrida por uma corrente I, também uniformemente distribuída com sentido **saindo** do papel.

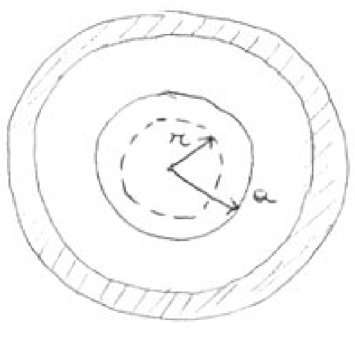
a) (0,5) Trace na figura as linhas de campo magnético para a região $a < r < b$. Justifique o sentido das linhas de campo.



A corrente I entrando no condutor interno produz um campo magnético **B** *que na região* a < r < b, *pela regra da mão direita (derivada da lei de Biot-Savart) possui linhas orientadas no sentido horário (como indicado na figura ao lado).*

b) (1,0) Obtenha o valor do campo magnético para a região em que $r < a$. Justifique.

A corrente que atravessa a superfície limitada pela curva é menor que a corrente total I que está entrando no condutor interno:



Já que a corrente está uniformemente distribuída pela seção do condutor podemos escrever:

$$\frac{I'}{I} = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} \Rightarrow I' = \frac{r^2}{a^2} I$$

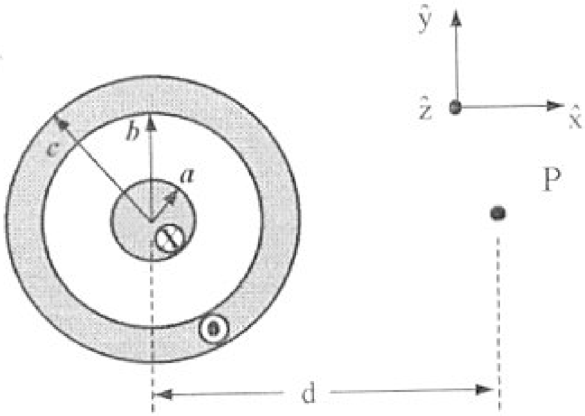
$$\Rightarrow \oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = \mu_0 I'$$

$\bar{B} \,//\, d\bar{s}$ e $\bar{B}$ é constante ao longo da curva escolhid

$$\Rightarrow B \oint ds = \mu_0 \frac{r^2}{a^2} I$$

$$B\, 2\pi \cancel{r} = \mu_0 \frac{r^{\cancel{2}}}{a^2} I \Rightarrow \boxed{B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\right)} \quad (r<a)$$

c) (0,5) Obtenha o valor do campo magnético no ponto **P**. Justifique.



← sistema de eixos escolhido.

O módulo do campo magnético devido ao condutor interno pode ser calculado com Ampère:

$$\oint \bar{B}_i \cdot d\bar{s} = \mu_0 I \qquad \bar{B}_i \parallel d\bar{s} \qquad B_i = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad B_i \cdot (2\pi d) = \mu_0 I \Rightarrow B_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

O sentido de $\bar{B}_i$ será $(-\hat{y})$ porquê a corrente no condutor interno está entrando. Por isso: $\bar{B}_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}(-\hat{y})$

No caso do campo magnético devido ao condutor externo teremos:

$$\oint \bar{B}_e \cdot d\bar{s} = \mu_0 I \qquad \bar{B}_e \parallel d\bar{s} \qquad B_e = \text{const.}$$

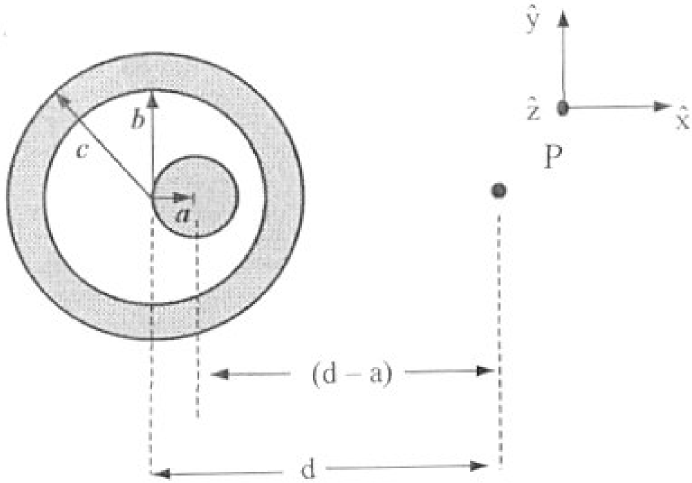
$$\Rightarrow \quad B_e \cdot (2\pi d) = \mu_0 I \Rightarrow B_e = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

Desta vez o sentido de $\bar{B}_e$ será $(+\hat{y})$ porquê a corrente I está saindo no condutor externo: $\bar{B}_e = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}(\hat{y})$.

No final no ponto P o campo será:

$$\bar{B}_P = \bar{B}_i + \bar{B}_e = -\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{y} + \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{y} = \bar{0}$$

d) (0,5) Qual seria o valor do campo magnético no ponto **P** se o condutor central fosse deslocado de a, como mostra a figura abaixo?



Neste caso, o campo magnético produzido pelo condutor externo não irá mudar: $\bar{B}_e = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}(\hat{y})$.
Ao contrário, o condutor interno agora está deslocado e o campo produzido por ele no ponto P será diferente; utilizando Ampère:

$$\oint \bar{B}_i' \cdot d\bar{s} = \mu_0 I \qquad \bar{B}_i' // d\bar{s} \qquad \bar{B}_i' \text{ const.}$$

$$\rightarrow \quad B_i'(2\pi)\cdot(d-a) = \mu_0 I$$

$$B_i' = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-a)}$$ o sentido é sempre $(-\hat{y})$

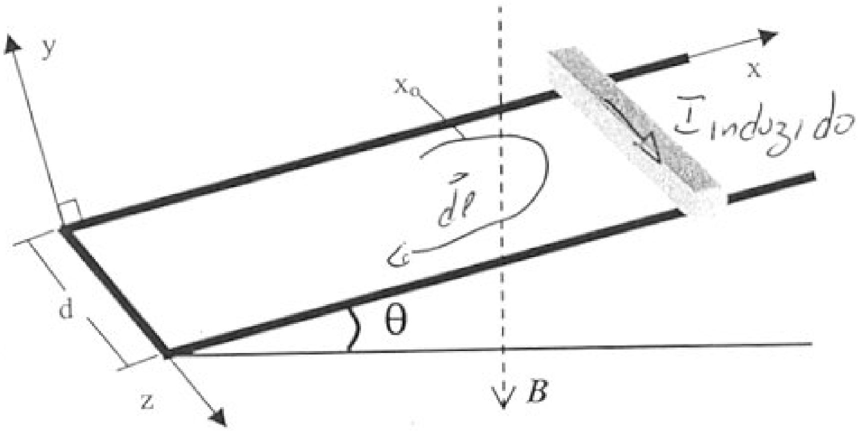
No ponto P teremos agora:

$$\bar{B}_P = \bar{B}_i' + \bar{B}_e = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-a)}\hat{y} + \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{y}$$

$$\bar{B}_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{a}{d(d-a)}(-\hat{y})$$

5º Questão (2,5 pontos) :

Uma barra condutora é deixada livre para deslizar, sem atrito, por sobre um par de trilhos também condutores apoiados em um plano inclinado, como mostra a figura abaixo. Em toda a região, há um campo magnético $\boldsymbol{B}$ vertical uniforme, no sentido do campo gravitacional. Observa-se que a barra tem um movimento acelerado até atingir uma velocidade limite (constante), v_c.



Considere a barra já com velocidade constante $\mathbf{v_c}$. No instante $t = 0$ sua posição é x_0. A resistência R do circuito está toda concentrada na barra, a separação dos trilhos é d e o ângulo que o plano inclinado faz com a horizontal é θ.

0,3 (a) Escreva a posição $x(t)$ da barra em função do tempo, a partir de t = 0 (observe o sistema de eixos na figura).

0,7 (b) Calcule o fluxo magnético, $\Phi(t)$, em função do tempo e a taxa de variação do fluxo, para t > 0?

0,5 (c) Calcule o valor da corrente na barra e indique seu sentido? Justifique.

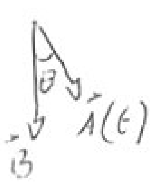
0,5 (d) Obtenha o valor da massa da barra em função dos dados do problema.

0,5 (e) Explique porque a barra atinge uma velocidade constante, v_c. Qual a razão para isto?

a) $x(t) = x_0 - v t$, $x(t)$ diminui com o tempo v_c no sentido $(-\hat{x})$

b) $\phi(t) = \vec{B} . A(t) = |B||A(t)| \cos\theta$ para $\vec{A} // (-\hat{y})$

$$\phi(t) = |B| |(d)(x_0 - vt)| \cos\theta \qquad e$$



$$\frac{d}{dt}\phi(t) = -(B\, d\, v)\cos\theta$$

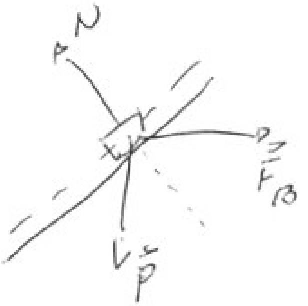
c) $I_{induzido} = \frac{\mathcal{E}_{induzido}}{R} = \left(\frac{1}{R}\right)\left(-\frac{d\phi(t)}{dt}\right)$ ∴

$$I_{ind} = \left(\frac{1}{R}\right)(B d v)\cos\theta$$

Como mostrado na figura o sentido de I_{ind}, na barra, é $(\hat{z})$, mesmo sentido de $d\vec{l}$ (horário, devido a $\vec{A}(t) \parallel (-\hat{y})$)

ou Como $\phi(t)$ diminui com o tempo, de acordo com a Lei de Lenz, o campo magnético gerado por I_{ind} terá o sentido de $\vec{A}(t)$ para tentar compensar a diminuição de $\phi(t)$

d)



velocidade constante $\Rightarrow \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_B = 0$

Logo $|(F_B)_x| = |P_x|$ isto é

$P \operatorname{sen}\theta = F_B \cos\theta$ com $|F_B| = I d B$

∴ $mg \operatorname{sen}\theta = \left(\frac{B d v}{R}\cos\theta\right) d B \cos\theta \Rightarrow m = \frac{B^2 d^2 v}{R g}\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

e) Como a força magnética é proporcional a I, que por sua vez é proporcional a v, a força magnética vai crescendo até que a força resultante $(\vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_B)$ seja nula. A partir deste instante o movimento será uniforme.