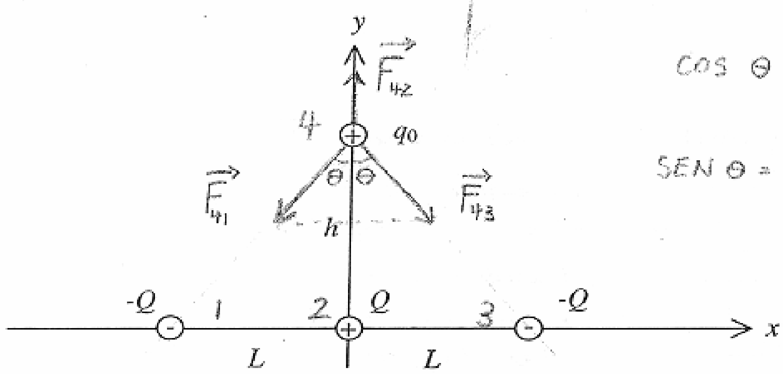
1ª Questão (2,5 pontos):

Três cargas puntiformes estão fixas sobre o eixo dos x, conforme a figura abaixo. A carga positiva Q se encontra na origem e as duas cargas negativas $-Q$ estão situadas em $x = L$ e em $x = -L$. Uma outra carga q_0, positiva, é colocada sobre o eixo dos y a uma distância h da origem ($h>0$). Em função dos dados do problema e de k:



$\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2+L^2}}$

$\text{sen}\,\theta = \frac{L}{\sqrt{h^2+L^2}}$

a) (2,0) Calcule a força resultante sobre a carga q_0.

b) (0,5) Determine a expressão para a força resultante sobre a carga q_0 quando esta carga se encontra muito distante das outras três ($h>>L$).

a) $\vec{F}_R = \vec{F}_{41} + \vec{F}_{42} + \vec{F}_{43}$

NA DIREÇÃO x: $F_{42_x} = 0$ & $F_{41_x} = -F_{43_x} \Rightarrow F_{R_x} = 0$

NA DIREÇÃO y: $F_{R_y} = F_{42} - F_{41}\cos\theta - F_{43}\cos\theta$

$$= K\frac{Qq_0}{h^2} - 2K\frac{Qq_0}{h^2+L^2}\frac{h}{\sqrt{h^2+L^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_R = KQq_0\left(\frac{1}{h^2} - \frac{2h}{(h^2+L^2)^{3/2}}\right)\hat{y}}$$

b) SE $h \gg L$ ENTÃO $(h^2+L^2)^{3/2} \approx h^3$

$$\boxed{\vec{F}_R \approx K\frac{Qq_0}{h^2}(-\hat{y})}$$

$3^{\underline{a}}$ Questão

A figura mostra o esquema da seção reta de um cabo coaxial muito longo de comprimento L. Imagine que o cilindro interno da figura seja não condutor (isolante) e tenha uma densidade volumétrica de carga **não** uniforme dada por **$\rho(r) = B/r$** onde B é uma constante positiva. O cilindro externo é metálico (condutor).

(a) calcule a carga total no cilindro interno.

(b) Quais são as unidades de medida de B ?

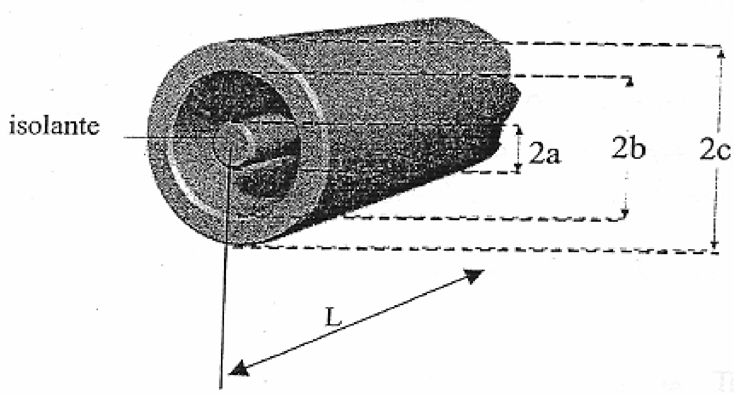
Se o cilindro externo possui uma carga líquida **$q = -\pi BaL$** calcule :

(c) a carga na superfície externa do cilindro metálico (externo). Justifique os seus cálculos.

(d) o campo elétrico (módulo, direção e sentido) nas seguintes regiões :

(i) $b < r < c$ justifique;

(ii) $r > c$ justifique.



(a) $\rho(r) = B/r \qquad V = \pi r^2 L \qquad dV = 2\pi r L\, dr$

$$Q = \int_0^a \rho(r)\, dV = \int_0^a \frac{B}{\cancel{r}}\, 2\pi \cancel{r} L\, dr = B\, 2\pi L \int_0^a dr = 2\pi a L B$$

$Q = 2\pi a L B$ = carga total no cilindro interno (isolante)

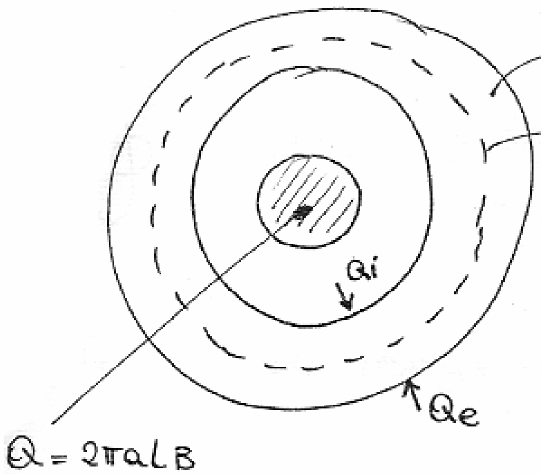
(b) Unidades de medida de B

$[\rho] = [C/m^3] \qquad \rho = B/r \qquad [r] = [m]$

$[\rho] = \left[\frac{B}{r}\right] \Rightarrow [B] = [\rho \cdot r] = \left[\frac{C}{m^3} \cdot m\right]$

$\Rightarrow [B] = [C/m^2]$

Considerando a carga líquida no cilindro externo $q = -\pi a B L$:



$\Downarrow$

O campo elétrico deve ser identicamente nulo porquê estou dentro de um condutor

$\Rightarrow$ carga interna $= 0$

$\Rightarrow$ carga na superfície interna do cilindro (Q_i):

$$Q_i = -2\pi a L B$$ (igual mas de sinal oposto à carga do cilindro isolante interno)

A carga na superfície externa do cilindro externo será:

$$Q_e = Q + q = 2\pi a L B - \pi a B L = \pi a L B$$

d)

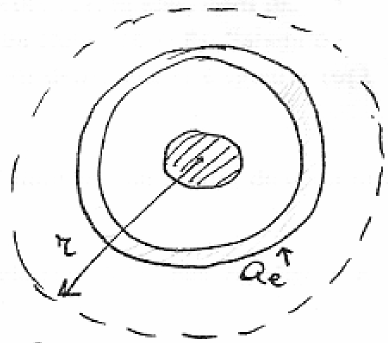
(i) $b < r < c$ Estamos dentro do cilindro metálico externo:

$\Rightarrow \bar{E} = \bar{0}$ (campo elétrico em um condutor é sempre $= 0$).

$r > c$

Aplico Gauss:

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = \frac{Q_{interna}}{\epsilon_0}$$



$Q_{interna} \equiv Q_e$ (carga sup. externa do cilindro)

$$Q_e = \pi a L B$$

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = \frac{\pi a L B}{\epsilon_0}$$

..à sup. gaussiana (simetria cilíndrica) o campo elétrico de módulo — constante.

Além disso:

$$\bar{E}\cdot d\bar{A} = |\bar{E}|\cdot|d\bar{A}|\cos\theta = |E|\cdot|dA|$$

$$\theta = 0°$$

$$\Rightarrow \quad \oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = |E|\int dA = |E|\cdot\underbrace{2\pi r L}_{\text{superfície lateral do cilindro gaussiano}}$$

$$|E|\,2\cancel{\pi} r \cancel{L} = \frac{\cancel{\pi} a \cancel{L} B}{\epsilon_0}$$

$$|E| = \frac{a\,B}{2\epsilon_0 r}$$

$$\bar{E}(r) = \frac{a\,B}{2\epsilon_0 r}\,\hat{r}$$

4ª Questão:

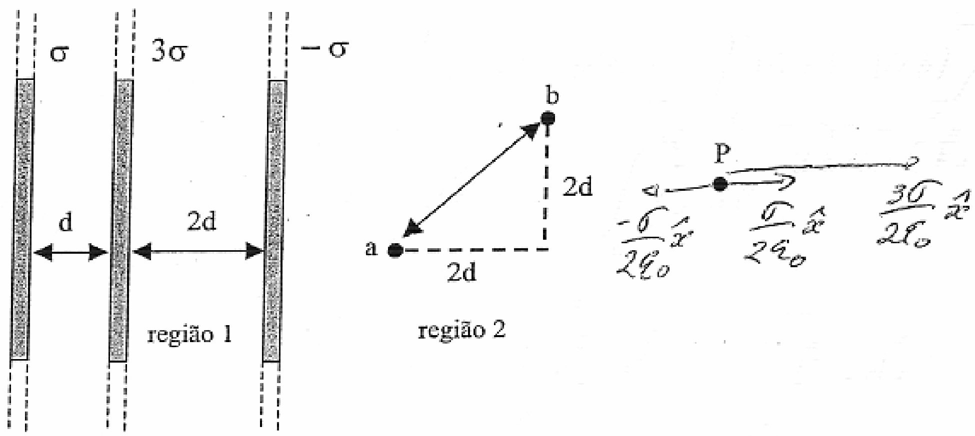
Considere três placas paralelas infinitas, uniformemente carregadas, com distribuição superficial de carga σ, 3σ e $-\sigma$ conforme mostrado na figura ($\sigma > 0$). Sabendo que o módulo do campo elétrico para um plano infinito com densidade σ é igual a $\sigma/(2\varepsilon_0)$ determine:

(a) (0,4) a direção e o sentido do campo, no ponto **P** indicado na figura, de cada uma das placas **separadamente.** Justifique.

(b) (0,8) O módulo, direção e sentido do campo elétrico total nas regiões 1 e 2 mostradas na figura. Justifique.

(c) (0,6) A diferença de potencial elétrico, **V(a)-V(b)**, entre os pontos **a** e **b** separados por uma distância conforme a figura. Justifique.

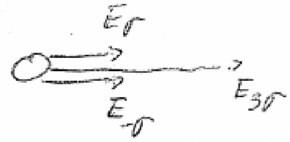
(d) (0,2) Faça uma avaliação sobre o sinal de sua resposta no item anterior, comente se o sinal obtido está de acordo com o esperado.



(a) O campo é paralelo a direção x, isto é, perpendicular aos planos das placas. O eixo x é um eixo de simetria. O sentido do campo é saindo da placa quando temos uma distribuição de cargas positivas e entrando quando negativa.

(b) P é um ponto da região 2, nesta região como mostrado em P temos $\vec{E}_2 = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x} + \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}\right) = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}$

Na região 1 teremos todos os campos no mesmo sentido $\hat{x}$

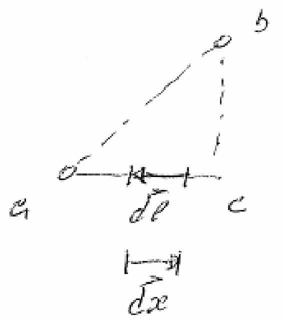


$$\text{Logo} \quad \vec{E}_1 = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x} + \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}\right) = \frac{5\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}$$

(c) Como $\vec{E}_2$ está na direção x, a diferença de potencial $V(a) - V(b)$ é igual a $V(a) - V(c)$ onde c é o ponto no vértice de ângulo reto do triângulo, isto é;

$$V(a) - V(b) = [V(a) - V(c)] + \underbrace{[V(c) - V(b)]}_{\text{ZERO } (\vec{E}_2 \perp \text{deslocamen}}$$

$$\text{logo} \quad V(a) - V(b) = V(a) - V(c) = -\int_c^a \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$$



$$\text{sendo que} \quad -\int_c^a \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \int_{x_a}^{x_c} \vec{E}_2 \cdot d\vec{x}$$

$$\text{Então} \quad V(a) - V(b) = \int_{x_a}^{x_c} \vec{E}_2 \cdot d\vec{x} = |E_2| \int_{x_a}^{x_c} dx = \left(\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\right)(x_c - x_a) = \frac{3\sigma d}{\varepsilon_0}$$

(d) Como $\vec{E}_2$ aponta no sentido positivo de x temos que $V(a) > V(b)$ logo $V(a) - V(b) > 0$

Portanto o valor positivo encontrado no cálculo do item (c) está de acordo com o esperado.

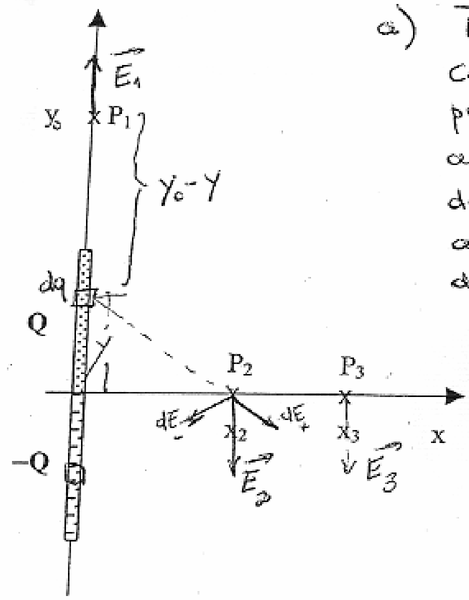
2ª Questão:

Um bastão de comprimento 2ℓ tem cargas Q e $-Q$ ($Q > 0$) uniformemente distribuídas em cada metade do seu comprimento, conforme mostra a figura.

(a) (0,5) Indique, justificando, a direção e o sentido do campo elétrico nos pontos P_1, fora da bastão e sobre o eixo y positivo, e P_2, sobre o eixo x.

(b) (2,0) Obtenha a expressão para o campo elétrico num ponto P_1 sobre o eixo y, a distância $y > \ell$ do centro do bastão.

(c) (0,5) Qual a diferença de potencial entre os pontos P_2 e P_3 sobre o eixo x. Justifique.



a) $\vec{E}_1$ na direção y e sentido positivo. Como o campo elétrico de carga puntiforme varia com $\frac{1}{r^2}$ e todas as cargas positivas estão a distâncias menores de P_1 do que as negativas, as contribuições das positivas vão dominar.

$\vec{E}_2$ na direção y e sentido negativo. Ver figura. As componentes na direção x se anulam.

b) $\vec{dE} = k \dfrac{dq}{(y_0 - y)^2}\hat{y}$ $\qquad dq = \lambda\, dy$ $\qquad$ onde $\begin{cases} \lambda = -Q/\ell \text{ p/ } -\ell < y < 0 \\ \lambda = Q/\ell \text{ p/ } 0 < y < \ell \end{cases}$

$$\vec{E} = k\hat{y}\int_{-\ell}^{0} \frac{-Q/\ell}{(y_0 - y)^2}\,dy + k\int_{0}^{\ell} \frac{Q/\ell}{(y_0 - y)^2}\,dy$$

$$= \hat{y}\frac{kQ}{\ell}\left(\left[-\frac{1}{(y_0 - y)}\right]_{-\ell}^{0} + \left[\frac{1}{(y_0 - y)}\right]_{0}^{\ell}\right) = \hat{y}\frac{kQ}{\ell}\left(-\frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0 + \ell} + \frac{1}{y_0 - \ell} - \frac{1}{y_0}\right)$$

$$= \frac{kQ}{\ell}\left(\frac{2y_0}{y_0^2 - \ell^2} - \frac{2}{y_0}\right)\hat{y}$$

c) $\Delta V = -\int \vec{E} \cdot dx\,\hat{x}$ $\qquad$ como $\vec{E}$ é perpendicular ao eixo x $\rightarrow \vec{E} \cdot \hat{x} = 0$

logo $\Delta V = 0$