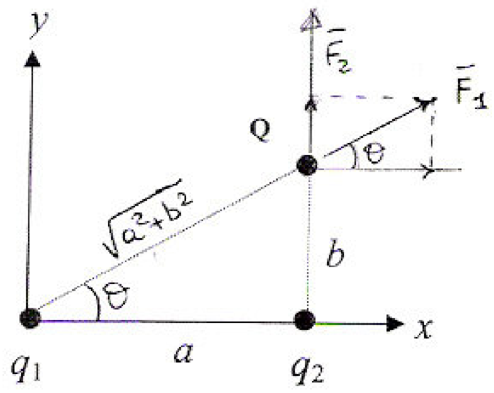
1ª Questão:

Três cargas puntiformes positivas q_1, q_2 e Q estão colocadas nos vértices de um triângulo retângulo de catetos a e b, de acordo com a figura abaixo. Calcule a força elétrica resultante sobre a carga Q.



$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$|\vec{F}_1| = k\,\frac{q_1 Q}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2} \quad ; \quad |\vec{F}_2| = k\,\frac{q_2 Q}{b^2}$$

$$\vec{F}_1 = |\vec{F}_1| \cdot \cos\theta\,\hat{x} + |\vec{F}_1|\sin\theta\,\hat{y} =$$

$$= k\,\frac{q_1 Q}{(a^2+b^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\hat{x} + k\,\frac{q_1 Q}{(a^2+b^2)} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\hat{y}$$

$$\vec{F}_2 = 0 \cdot \hat{x} + |\vec{F}_2|\,\hat{y} = k\,\frac{q_2 Q}{b^2}\,\hat{y}$$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left(k\, q_1 Q\,\frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)\hat{x} + \left(k\,\frac{q_1 Q\, b}{(a^2+b^2)^{3/2}} + k\,\frac{q_2 Q}{b^2}\right)\hat{y}$$

2ª Questão:

Uma distribuição de cargas positivas tem a forma do arco semicircular de raio **R** que aparece na figura. A densidade linear de carga, sobre o arco, é dada por **λ**.

A carga total sobre o semicírculo é igual a **Q**.

Calcular :

(i) o vetor campo elétrico no centro de curvatura **C** do arco (lembre-se que $dl = r\, d\theta$);

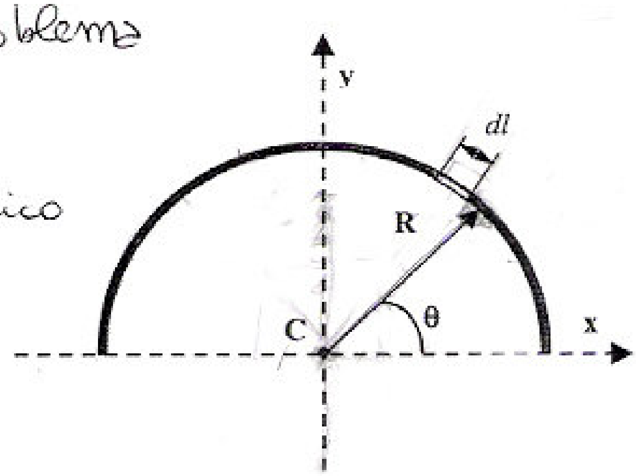
(ii) a carga total **Q** em função de **λ** ;

(iii) a força total sobre uma carga de valor $\mathbf{Q_0} = \mathbf{3Q}$ colocada no centro de curvatura **C**.

(i) Pela simetria do problema

$$\bar{E} = E(-\hat{y})$$

ou seja: o campo elétrico está na direção do eixo y negativo.



$$E_x = \int dE_x = 0$$

$$E_y = |E| = \int dE \sin\theta$$

$$|\bar{E}| = k\int_0^{\pi} \frac{dq \sin\theta}{R^2} = \frac{k}{R^2}\int_0^{\pi} \sin\theta\, dq$$

$$dq = \lambda\, dl = \lambda R\, d\theta$$

$$|\bar{E}| = \frac{k}{R^{\cancel{2}}}\int_0^{\pi} \lambda \cancel{R} \sin\theta\, d\theta = \frac{k\lambda}{R}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

$$|\bar{E}| = \frac{k\lambda}{R}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} = \frac{2k\lambda}{R}$$

$$\bar{E} = -\frac{2k\lambda}{R}\,\hat{y} \quad //$$

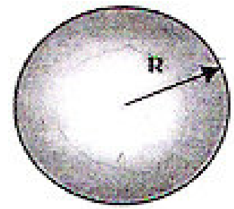
ii) $\lambda = \frac{Q}{\ell} \Longrightarrow \quad Q = \lambda\ell = \pi R\lambda$

iii) $\bar{F} = 3Q\cdot\bar{E} = -6\frac{k\lambda Q}{R}\,\hat{y}$

3.ª Questão:

Uma esfera isolante maciça de raio **R** possui uma densidade de carga volumétrica **não uniforme** $\rho = A \cdot r$ onde **A** é uma constante e **r** é a distância do centro da esfera.

Calcular :



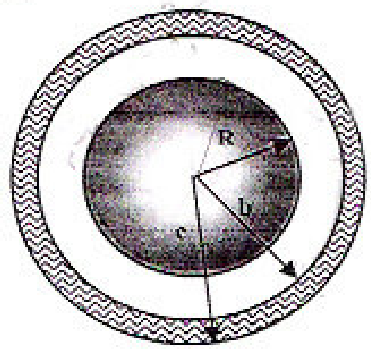
(i) as unidades de medida de **A** no Sistema Internacional;

(ii) o campo elétrico a uma distância **r < R**.

Esta esfera é agora envolvida por uma casca esférica concêntrica, condutora e neutra, com raio interno **b** e raio externo **c** (ver segunda figura).

(iii) Qual é a densidade superficial de carga σ induzida na parede interna da casca condutora ?

(iv) Quanto vale o modulo do campo elétrico na região **r > c** ? Explique.



Sol

$\rho = A \cdot r$

(i) $[\rho] = [C]/[m^3]$

$$\frac{[C]}{[m^3]} = [A] \cdot [m] \Rightarrow [A] = \frac{[C]}{[m^4]}$$

(ii) Por Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \qquad Q_i\,?$$

$$Qi = \int_0^r \rho \, dV \qquad dV = 4\pi r^2 dr$$

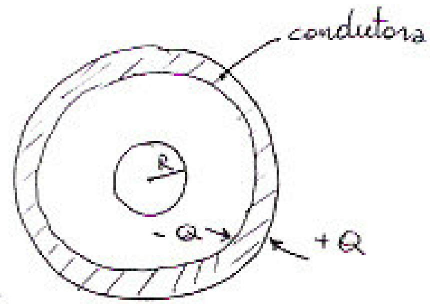
$$Qi = \int_0^r A \cdot r \cdot 4\pi r^2 \, dr = A\, 4\pi \int_0^r r^3 dr = \cancel{4} A \pi \frac{r^4}{\cancel{4}}$$

$$Qi = \pi A r^4$$

$$E \oint dA = \frac{\pi A r^4}{\epsilon_0} \qquad \oint dA = 4\pi r^2$$

$$E\, \cancel{4\pi r^2} = \frac{\cancel{\pi} A r^{\cancel{4}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{A r^2}{4\epsilon_0}}$$

iii)



$$Q = \int_0^R 4\pi r^2 dr \, \rho$$

$$Q = \int_0^R 4\pi A r^3 dr = \cancel{4}\pi A \frac{R^4}{\cancel{4}} = \pi A R^4$$

a = sup. interna casca condutora

$$\boxed{\sigma_i = -\frac{\pi A R^4}{a} = -\frac{\cancel{\pi} A R^4}{4\cancel{\pi} b^2} = -\frac{A}{4}\frac{R^4}{b^2}}$$

iv) $$\boxed{E = k\frac{Q}{r^2} = k\frac{\pi A R^4}{r^2}}$$

4ª Questão:

Sobre um círculo de raio R, centrado no eixo z, são dispostas seis cargas igualmente espaçadas. Três delas de valor $\mathbf{Q_1}$ e três de valor $\mathbf{Q_2}$. Sendo inicialmente $\mathbf{Q_1 = Q_2}$.

a) Calcule o potencial devido à distribuição de cargas sobre o círculo em um ponto $z = z_0$ sobre o eixo. Qual o potencial desta distribuição no infinito?

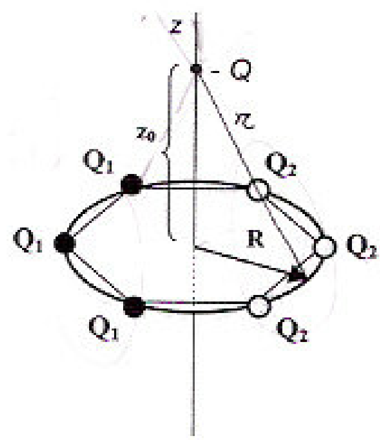
b) A partir do resultado do item anterior calcule o campo elétrico neste ponto z_0. Justifique.

Uma carga $-Q$, e massa **M**, é colocada sobre o eixo a uma distância $z = z_0$ do plano do anel.

c) Se as cargas $\mathbf{Q_1}$ e $\mathbf{Q_2}$ são positivas e de valor igual a **Q**. Qual será a direção e sentido do movimento desta carga **–Q**, quando ela for livre para se mover? Justifique.

d) Qual sua energia cinética quando ela tiver se deslocado de uma distância igual a z_0? Justifique.

e) Agora com $\mathbf{Q_1 = -Q_2}$ como fica a sua resposta do item (a). Você seria capaz de explicar de forma qualitativa este resultado?



(a)

$$V(r=\infty) = \text{zero}$$

$$V(z_0) = \sum_{i=1}^{6} \frac{kQ_i}{r} = \frac{3k(Q_1+Q_2)}{r} = \frac{3k(Q_1+Q_2)}{\sqrt{R^2+z_0^2}}$$

(b) Sendo $Q_1 = Q_2$ temos que o eixo z é uma eixo de simetria. Portanto: $\bar{E} = \bar{E}(\hat{z})$

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V = -\frac{\partial}{\partial z} V(\hat{z}) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{3k(Q_1+Q_2)}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right](\hat{z})$$

$$= -3k(Q_1+Q_2)\left[-\frac{1}{2}(R^2+z^2)^{-3/2}\,2z\right]$$

$$\bar{E} = 3k(Q_1+Q_2)\left[\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right](\hat{z})$$ (apontando para o menor potencial)

(c) $\bar{F} = -Q\bar{E}$ aponta no sentido do centro do círculo, para Q_1 e Q_2 positivas.

(d) Se ela se desloca de z_0, estará no centro do círculo. Sendo assim:

$$-Q\left(V(z_0) - V(0)\right) = \frac{1}{2} M v^2 = E_c \text{ (em } z=0)$$

$$-\frac{6kQ^2}{(R^2+z^2)^{1/2}} - \left(-\frac{6kQ^2}{(z^2)^{1/2}}\right) = 6kQ^2\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{(z^2+R^2)^{1/2}}\right]$$

(e) Para $Q_1 = -Q_2 \Rightarrow V(z_0) = $ zero para qualquer ponto sobre o eixo, exclusive $V(z=\infty)$. Isto pode ser explicado devido ao campo ser perpendicular ao eixo em qualquer ponto do mesmo. Sendo assim $\Delta V = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{z} = 0$ para $\bar{E} \perp \hat{z}$.