PUC-RIO – CB-CTC

FIS1051 – P1 DE ELETROMAGNETISMO – 08.04.13 – segunda-feira

Nome :____

Assinatura: ____

Matrícula:______________________________________Turma:________________

NÃO SERÃO ACEITAS RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS E CÁLCULOS EXPLÍCITOS.

Não é permitido destacar folhas da prova

Questão	**Valor**	**Grau**	**Revisão**
1ª Questão	3,5		
2ª Questão	3,0		
3ª Questão	3,5		
Total	10		

A prova só poderá ser feita a lápis, caneta azul ou preta e NÃO é permitido o uso de calculadoras eletrônicas.

Formulário e constantes físicas.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{N\,m^2}{C^2}$$

Superfície esfera = $4\pi\, R^2$

Volume esfera = $\frac{4}{3}\pi\, R^3$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 (x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2 + a^2\right)^{1/2}} = \sqrt{x^2 + a^2}$$

FIS1051 – P1 DE ELETROMAGNETISMO – 08.04.13 – segunda-feira

1ª Questão: (3,5)

Uma barra delgada de comprimento **L**[m] é envergada até formar um semi-círculo, conforme mostra a **Figura 1**:

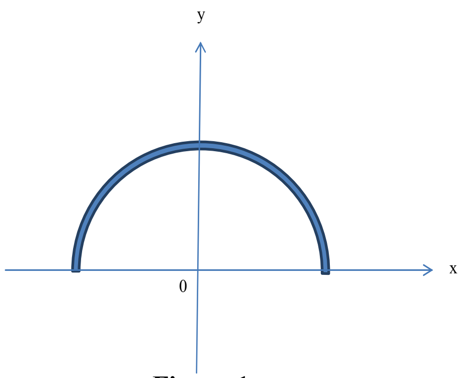


Figura 1

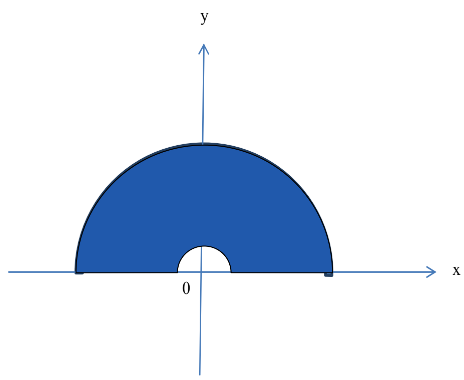


Figura 2

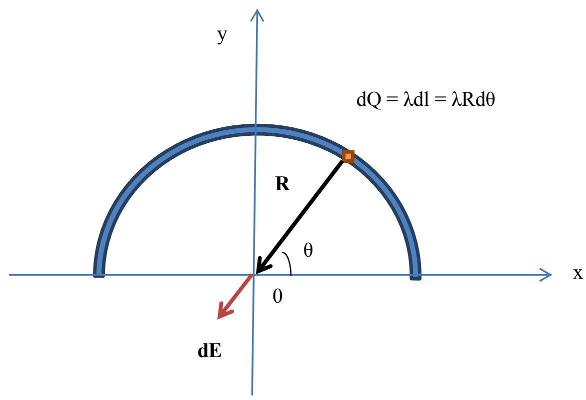
(a) (**1,0**) Se a barra tem uma densidade de carga uniforme **λ > 0** [C/m], calcule o campo elétrico na origem.

(b) (**1,0**) Onde deveria ser colocada uma carga pontual de valor igual ao da carga total da barra para que o campo na origem fosse nulo?

(c) (**1,5**) Considere agora que esse semicírculo se torne um semidisco de mesmo raio com um orifício concêntrico semicircular de raio **L/10π** [m] e com uma densidade superficial uniforme **σ** [C/m^2], como mostrado na **Figura 2**. Calcule o campo elétrico na origem devido a esta nova configuração.

SOLUÇÃO

a) Aplicação da lei de Coulomb e princípio da superposição:



$$d\vec{E} = k\frac{dQ}{R^2}\hat{R} = k\frac{\lambda}{R}\int_0^{\pi}\hat{R}\,d\theta$$

$$\hat{R} = -\hat{\rho} = -\cos\theta\,\hat{x} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{y}$$

$$R = \frac{L}{\pi}$$

$$\vec{E} = k\frac{\lambda}{R}\int_0^{\pi}[(-\cos\theta\,\hat{x} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{y})]\,d\theta$$

$$\vec{E} = -2k\frac{\lambda}{R}\hat{y}\ \text{[N/C]} \quad \text{ou} \quad \vec{E} = -2\pi k\frac{\lambda}{L}\hat{y}\ \text{[N/C]}$$

b) Campo de carga pontual que deve estar colocada no eixo y negativo para criar um campo na direção $+\hat{y}$.

$$\bar{E} = k\frac{Q}{R^2}\hat{R}$$

Q = λLe R = y

Assim, basta que:

$$k\frac{\lambda L}{y^2} = 2\pi k\frac{\lambda}{L}$$

$$y = -\frac{L}{\sqrt{2\pi}} \text{ [m].}$$

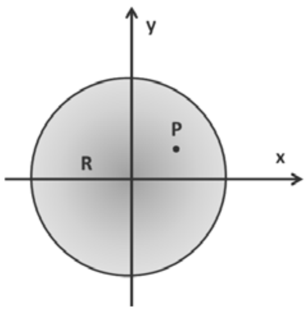
c) Basta usar o campo da letra **a** como diferencial fazendo λ = σ dρ, R = ρ e integrando em ρ:

$$\bar{E} = -2k\sigma\hat{y}\int_{\frac{L}{10\pi}}^{\frac{L}{\pi}}\frac{d\rho}{\rho} = -2k\sigma\left(\frac{\ln L}{\pi} - \frac{\ln L}{10\pi}\right)\hat{y}$$

$$\bar{E} = -2k\sigma\ln 10\hat{y} \text{ [N/C]}$$

2ª Questão: (3,0)

Uma esfera isolante de raio $R = 1{,}0\ m$ possui densidade volumétrica de carga não uniforme dada pela função $\rho\ (r) = A\ r$, onde a constante vale $A = +\ 36\ nC/m^4$. O sistema de coordenadas está indicado na figura (o eixo z sai do plano da figura). Use $\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-12}\ C^2/(Nm^2)$.



(a) **(0,7)** Adote uma superfície gaussiana esférica centrada na origem e de raio $r = 50\ cm$. Use-a para calcular o módulo do campo elétrico produzido em todos os pontos a $50\ cm$ da origem.

(b) (**0.8**) Calcule, utilizando o resultado do item anterior, o vetor campo elétrico $\vec{E}_P$ no ponto P de coordenadas $(40\ cm;\ 30\ cm;\ 0\ )$.

Suponha agora que uma caixa cúbica condutora de paredes espessas, carregada com carga líquida $Q_{LÍQ} = -\ 30\ nC$, seja colocada de forma a envolver totalmente nossa esfera isolante e eventualmente outras cargas. Suponha que a carga total da esfera isolante seja $Q_{ESF} = +\ 100\ nC$. Medindo-se toda a quantidade de carga presente na superfície externa da caixa metálica encontrou-se $Q_{EXT} = +\ 30\ nC$.

(c) (**1,5**) Existem outras cargas, além da esfera isolante, na caixa metálica? Justifique a sua afirmação e, em caso de resposta afirmativa, calcule o valor total destas outras cargas.

SOLUÇÃO

a) Teorema de Gauss:

$$\phi_S = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

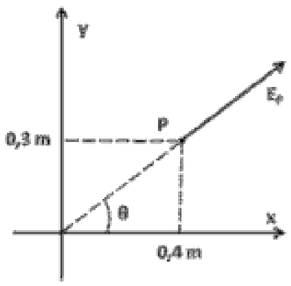
Para o membro esquerdo: (1) superfície de Gauss *S* é uma esfera centrada na origem e de raio *r = 0,5 m*; (2) por simetria esférica, o módulo do campo é uniforme em todos os pontos de *S*; (3) em todos os pontos de *S* o vetor área é paralelo ao vetor campo. Com tudo isso, o membro esquerdo fica simplesmente: $E(4\pi r^2)$. Já o cálculo de q_{int} fica:

$$q_{int} = \int \rho(r)dV = \int_0^{r=0,5} (Ar)(4\pi r^2\, dr) = 4\pi A \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{r=0,5}$$

Voltando a Gauss, e re-arrumando termos, chegamos a:

$$E = \frac{Ar^2}{4\varepsilon_0} = \frac{(36\times 10^{-9})(0,5)^2}{4\times(9\times 10^{-12})} \quad \rightarrow \quad \boxed{E = 250\ N/C}$$

b) Para as componentes de $\vec{E}$ no ponto P, ver figura:



Finalmente:

$$\vec{E}_P = (E\,cos\theta)\hat{x} + (E\,sen\theta)\hat{y} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_P = (200\ N/C)\hat{x} + (150\ N/C)\hat{y}}$$

c) Na caixa temos que:

$$Q_{LÍQ} = Q_{EXT} + Q_{INT} \quad \rightarrow \quad Q_{INT} = -60\ nC$$

Ou seja, na superfície interna da caixa toda a carga somada resulta em *– 60 nC*. Como a caixa é condutora, o campo dentro do material é nulo, significando que a carga total englobada Q_{ENG} por uma superfície de Gauss que passe por dentro do material condutor seja também nula:

$$Q_{ENG} = Q_{INT} + Q_{CAV} \quad \rightarrow \quad Q_{CAV} = +60\ nC$$

Assim, toda a carga presente dentro da cavidade vale *+ 60 nC*. Como nossa esfera já contribui com Q_{ESF} = *+100 nC*, isso significa que existem outras cargas dentro da cavidade:

$$Q_{CAV} = Q_{ESF} + Q_{OUTRAS} \quad \rightarrow \quad \boxed{Q_{OUTRAS} = -40\ nC}$$

3ª Questão: (3,5)

<u>CASO A</u>

O anel de raio R mostrado na **Figura 1** tem a densidade linear de carga:

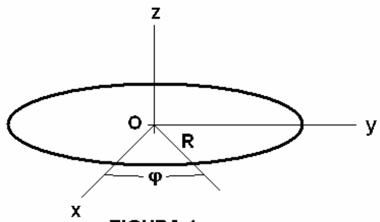


FIGURA 1

$$\lambda(\varphi) = \lambda_o + \lambda_1 \cos \varphi \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi).$$

(a) (**1,0**) Determine uma expressão para o potencial elétrico em um ponto arbitrário do eixo z (perpendicular ao plano do anel que contém a origem O).

(b) (**1,0**) É possível obter uma expressão para o vetor campo elétrico a partir do resultado do item (a)? <u>Justifique sua resposta</u> e determine expressões para as componentes do campo elétrico para as quais a operação proposta seja possível.

<u>CASO B</u>

(c) (**1,5**) Uma esfera de raio R tem densidade volumétrica de carga ρ uniforme. Determine a expressão para o campo elétrico em um ponto arbitrário do espaço em função da sua distância r (r > R) ao centro da esfera e use este resultado para determinar a expressão do potencial elétrico em função de r (r > R) na mesma região do espaço.

SOLUÇÃO.

<u>CASO A</u>

(a) O potencial elétrico em um ponto arbitrário do eixo z é:

$$V(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_0^{2\pi}\frac{(\lambda_o + \lambda_1 \cos\varphi)R\,d\varphi}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\int_0^{2\pi}(\lambda_o + \lambda_1\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{2\pi R\lambda_o}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

(b) A distribuição de cargas no anel não apresenta simetria que assegure que o campo elétrico no eixo tem a direção z. Portanto, a expressão anterior, que não explicita a dependência de *V(x,y,z)* com as três variáveis espaciais, não permite que o campo seja determinado a partir do gradiente do potencial elétrico. Entretanto,

$$E_z(0,0,z) = -\frac{\partial}{\partial z}V(0,0,z) = \frac{2\pi R\lambda_o}{4\pi\epsilon_o}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

<u>CASO B</u>

(c) Supondo uma superfície Gaussiana cilíndrica de raio r (r > R) concêntrica com a esfera, obtém-se:

$$4\pi r^2 \cdot E(r) = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_o} \rightarrow E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_o}\frac{R^3}{r^2} \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_o}\frac{R^3}{r^2}\hat{r}$$

Logo:

$$V(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot\vec{dr} = \int_r^\infty \frac{\rho}{3\epsilon_o}\frac{R^3}{(r')^2}\hat{r}\cdot(dr'\hat{r}) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_o}\int_r^\infty \frac{dr'}{(r')^2} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_o}\left[\frac{1}{r'}\right]_r^\infty = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_o}\frac{1}{r}$$