Gabarito P1 (Prova B) MAT1158 - Cálculo B

Marcelo Coelho Martins - PUC Que Pariu!

26 de Janeiro, 2014

1

A.

$$\int \sin(3x).\sin(3x).dx$$

$$3x = u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{1}{3}\int \underbrace{\sin(u)}_{f'(u)}.\underbrace{\sin(u)}_{g(u)}.du$$

Utilizando o método de integração por partes, temos:

$$\int \sin^2(u).du = -\cos(u).\sin(u) + \int \cos^2(u).du$$

$$\int \sin^2(u).du = -\cos(u).\sin(u) + \int (1 - \sin^2(u)).du$$

$$\int \sin^2(u).du = -\cos(u).\sin(u) + \int 1.du - \int \sin^2(u).du$$

$$\int \sin^2(u).du = \frac{u - \cos(u).\sin(u)}{2} + c$$

$$\int \sin^2(3x).dx = \frac{1}{3}\int \sin^2(u).du = \frac{3x - \cos(3x).\sin(3x)}{6} + c$$

B.

$$x = 2.\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = 2.\cos(\theta).d\theta$$

$$\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}} \cdot dx \ = \ \int \tan^2(\theta).d\theta$$

Sabemos que, se $y = \tan(\theta)$, $y' = \tan^2(\theta) + 1$. Realizando a operação inversa, temos:

$$\int \frac{dy}{d\theta} \cdot d\theta = \int \tan^2(\theta).d\theta + \int 1.d\theta$$

$$\tan(\theta) - \theta + c = \int \tan^2(\theta).d\theta$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin(\theta) = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\int \frac{x^2}{(4 - x^2)^{3/2}} \cdot dx \ = \ \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

C.

$$\int \underbrace{x^2}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{f(x)} .dx = -x^2.e^{-x} - \int 2x.(-e^{-x}).dx =$$

$$-x^2.e^{-x} + 2\int \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v(x)} .dx$$

$$\int x.e^{-x}.dx = -x.e^{-x} - \int -e^{-x}.dx = -(x+1).e^{-x}$$

$$\int x^2.e^{-x}.dx = -x^2.e^{-x} - 2(x+1).e^{-x} = -e^{-x}.(x^2 + 2x + 2)$$

D.

$$\int \frac{x+1}{x^2 - 2x} \cdot dx = \int \frac{x+1}{x(x-2)} \cdot dx =$$

$$\int \frac{x}{x(x-2)} \cdot dx + \int \frac{1}{x(x-2)} \cdot dx = \int \frac{1}{x-2} \cdot dx + \int \frac{1}{x(x-2)} \cdot dx$$

Nota-se que:

$$1 = \frac{x - (x-2)}{2}$$

Logo, podemos substituir o algarismo 1 na integral pela expressão encontrada. Assim, teremos:

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{x-(x-2)}{2x(x-2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right)$$

Sendo assim, nossa integral fica da seguinte forma:

$$\int \frac{1}{x-2} \cdot dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2} \cdot dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\frac{3}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x) + c$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x-2)^3}{x}\right) + c$$

2

A.

Suponhamos que $y = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} x.\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(\pi y)}{y}$$

Aplicando o teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} x.\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{y\to 0} \pi.\cos(\pi y) = \pi$$

B.

$$x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x.\ln(x)} =$$
$$e^{\frac{\ln(x)}{1/x}}$$

$$\lim_{x\to 0_+} e^{\frac{\ln(x)}{1/x}} = \lim_{x\to 0_+} e^{\frac{1/x}{-1/x^2}} =$$

$$\lim_{x\to 0_+} e^{-x} = 1$$

C.

Este limite é um caso simples e direto da aplicação do teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin(x) - 1}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \to \pi/2} \cos(x) = 0$$

3

A.

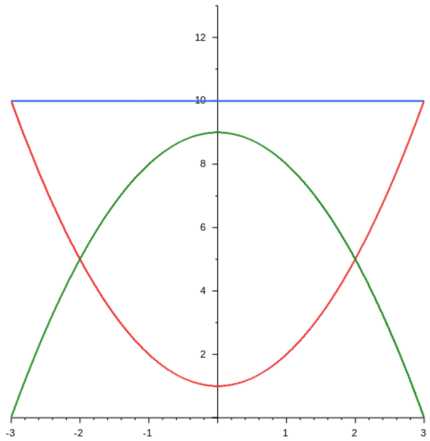

Figure 1: $y = x^2 + 1$, $y = 9 - x^2$, $y = 10$

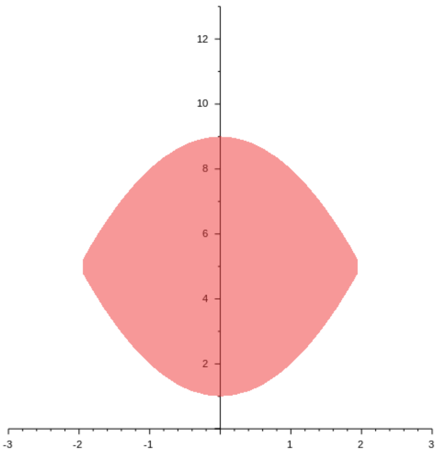

Figure 2: A região que será rotacionada

B. Para calcularmos a integral, devemos perceber que o volume do sólido em questão é nada mais do que o volume da rotação da parábola $y = x^2 + 1$ (com x variando entre os valores onde as duas parábolas se encontram) menos o volume da rotação da parábola $y = 9 - x^2$, ambas em torno da reta $y = 10$. O resultado será um sólido semelhante a uma boia.
Apesar disso, notem a perfeita simetria da **figura 1**. Se rotacionarmos a mesma região em torno da reta $y = 0$, teremos EXATAMENTE o mesmo sólido, estando apenas deslocado no espaço. A vantagem disso é que o processo de integração se faz muito mais fácil e intuitivo. O criador da questão fez isso de propósito! (Risos)

C. Primeiro vamos encontrar os valores de x nos quais ambas as parábolas se encontram. Para isso, igualamos suas equações:

$$x^2 + 1 = 9 - x^2$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Feito isso, agora podemos escrever e calcular a integral:

$$V = \int_{-2}^{2} [9 - x^2 - (x^2 + 1)].dx$$

$$V = \int_{-2}^{2} (10 - 2x^2).dx$$

$$V = \frac{88}{3}$$