P4 de Álgebra Linear I – 2001.2

Data: 3 de dezembro de 2001.

Gabarito

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.2.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		F	
1.b		F	
1.c	V		
1.d		F	
1.e	V		
1.f		F	
1.g	V		
1.h		F	
1.i		F	

1.a) Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e existem vetores u e w tais que $Au = 2u$ e $Aw = -w$, então a soma dos autovalores de A^6 é igual a 63.

Resposta: Falso. Observe que $A^2(u) = A(A(u)) = A(2u) = 2A(u) = 4u$. Repetindo o processo, $A^6(u) = 2^6 u = 64u$. Analogamente, $A^6(w) = (-1)^6 w = w$. Portanto, os autovalores de A^6 são 64 e 1, e sua soma é 65.

1.b) A distância entre o plano de equação $x + y + z = 0$ e o plano de equação $x+y+z=1$ é igual a 1.

Resposta: Falso. Considere a reta perpendicular a $x+y+z=1$ que contém ao ponto $(0,0,0)$, ou seja, (t,t,t). Esta reta intersecta $x+y+z=1$ quando $t=1/3$. Logo o ponto de interseção é $(1/3,1/3,1/3)$ e este é o ponto do plano $x+y+z=1$ mais próximo de $x+y+z=0$. Logo a distância entre os planos é $(1/9+1/9+1/9)^{1/2}=\sqrt{3}/3 \neq 1$.

Outra forma, observe que o ponto $(0,0,1)$ do plano $x+y+z=1$ está a distância 1 do ponto $(0,0,0)$ do plano $x+y+z=0$. Logo a distância entre os planos é no máximo 1. E a distância será 1 se, e somente se, o vetor $(0,0,1)$ for normal aos dois planos, o que é falso.

1.c) A reta de equações $x=y=z$ é paralela ao plano de equação $2x-y-z=3$.

Resposta: Verdadeiro. Faça o produto escalar $(2,-1,-1)\cdot(1,1,1)$ dos vetores normal ao plano e paralelo à reta, que é zero. Observe também que a reta e o plano são disjuntos, o ponto $(0,0,0)$ da reta não pertence ao plano.

1.d) O volume do paralelepípedo formado pelos vetores $(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(0,\ 1,\ 0)$ é igual a 3.

Resposta: Falso. Os vetores formam uma base ortonormal e seu produto misto é ± 1. Logo o volume é 1.

1.e) É possível encontrar dois vetores u e v não nulos no plano tais que $\| u+v \| = \| u-v \|$.

Resposta: Verdadeiro. É suficiente considerar u e v ortogonais:

$$\| u+v \|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + 2u\cdot v + v\cdot v = u\cdot u + v\cdot v.$$

Analogamente,

$$\| u-v \|^2 = (u-v)\cdot(u-v) = u\cdot u - 2u\cdot v + v\cdot v = u\cdot u + v\cdot v.$$

Logo, como $\| u+v \|$ e $\| u-v \|$ são não negativos, $\| u+v \| = \| u-v \|$

1.f) Se u, v e w são três vetores de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares entre si, então existem α, β e γ números reais não nulos tais que $\alpha u + \beta v + \gamma w = \vec{0}$.

Resposta: Falso. Os vetores são linearmente independentes. Por exemplo, para ver que α deve ser necessariamente nulo faça

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w) \cdot u = \alpha(u \cdot u) + \beta(v \cdot u) + \gamma(w \cdot u) = \alpha(u \cdot u) = \vec{0} \cdot u = 0.$$

Logo $\alpha = 0$. O mesmo argumento fornece $\beta = \gamma = 0$.

1.g) Seja T uma matriz ortogonal. Então se $Tv = \vec{0}$, então $v = \vec{0}$.

Resposta: Verdadeiro. Observe que T conserva módulos, logo se $T(u) = \vec{0}$ temos $||u|| = ||T(u)|| = ||\vec{0}|| = 0$, logo $u = \vec{0}$.

1.h) Se -1, 1 e 1 (isto é, 1 tem multiplicidade 2) são os autovalores de uma matriz A 3×3, então A representa um espelhamento com relação a um plano.

Resposta: Falso. Observe que os autovetores não têm que ser necessariamente ortogonais. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

satisfaz as hipóteses do enunciado é não é espelhamento.

1.i) Se R é uma rotação de 90^o em $\mathbb{R}^3$ e se u não pertence ao eixo de rotação, então $u \cdot Ru = 0$, isto é, u e $R(u)$ são ortogonais.

Resposta: Falso. Considere a rotação de $\pi/2$ graus e eixo Z

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O vetor $(1, 1, 1)$ se transforma em $(-1, 1, 1)$ e estes dois vetores não são ortogonais (seu produto escalar vale 1).

2) Considere as retas r e s definidas pelas equações:

$$r : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 1 \end{array} \right.$$

$$s:\begin{cases} x &= 0 &+& t \\ y &= 1 &+& t \\ z &= -1 &+& 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2.a) Determine uma equação paramétrica de r.

2.b) Determine uma equação cartesiana de s, isto é, escreva s como interseção de dois planos dados em equações cartesianas.

2.c) Estude a posição relativa de r e s.

2.d) Se a sua resposta no item (2.c) foi *reversas* ou *paralelas* calcule a distância entre r e s, e se foi *se intersectam* determine a equação cartesiana do plano que contém as retas r e s.

Resposta: Para o item (a) uma forma é resolver os sistema. Temos, $x = y+1$ e $z = -2y - 1$. Escolhendo y como parâmetro temos

$$x = t + 1, \quad y = t, \quad z = -2t - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Outra forma é calcular o vetor diretor v da reta, que é ortogonal aos vetores normais aos dois planos. Logo v é paralelo a $(1,1,1) \times (1,-1,0) = (1,1,-2)$. Agora é suficiente determinar um ponto comum aos dois planos: o ponto $(1,0,-1)$.

Para o item (b) é suficiente encontrar dois planos não paralelos contendo a s. Os vetores normais destes planos devem ser ortogonais ao vetor diretor da reta. Ou seja, se (a,b,c) é o vetor normal do plano então

$$a + b + 2c = 0.$$

Um plano é da forma (por exemplo) $x - y = d$ e outro $2x - z = d'$ onde d e d' sào dados pela condição $(0,1,-1)$ pertencer aos planos. Logo,

$$x - y = -1, \quad 2x - z = 1.$$

As retas r e s têm vetores diretores não paralelos. Logo ou são reversas ou se intersetam. Considere o ponto $P = (1,0,-1)$ de r e $Q = (0,1,-1)$ de s. Considere o vetor $QP = (1,-1,0)$ e os vetores diretores $(1,1,-2)$ de r e $(1,1,2)$ de s. Para as retas serem reversas é necessário e suficiente que

$$(1,-1,0) \cdot [(1,1,-2) \times (1,1,2)] \neq 0.$$

Como

$$(1,-1,0)\cdot[(1,1,-2)\times(1,1,2)]=(1,-1,0)\cdot(4,-4,0)=8,$$

as retas são reversas.

A distância entre as retas é

$$\frac{8}{||(1,1,-2)\times(1,1,2)||}=\frac{8}{||(4,-4,0)||}=\frac{8}{4\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

3) Considere $\beta=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(0,1,0)\}$.

3.a) Estude se β é uma base de $\mathbb{R}^3$.

3.b) Considere uma transformação linear A de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ verificando

$$A(1,1,0)=(1,0,1),\quad A(1,0,1)=(0,1,1),\quad A(0,1,1)=(1,0,1).$$

Estude se A é ortogonal.

3.c) Determine a matriz de A na base canônica.

3.d) Determine um autovalor e um autovetor (associado ao autovalor encontrado) de A.

3.e) Encontre uma base onde a matriz de A é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resposta: Obviamente β não é uma base: uma base de $\mathbb{R}^3$ tem três vetores (que são l.i.) (quatro vetores de $\mathbb{R}^3$ nunca são l.i.).

A transformação A não é ortogonal. Para ser ortogonal deve conservar módulos. Observe que

$$A(1,0,-1)=A(1,1,0)-A(0,1,1)=(1,0,1)-(1,0,1)=\vec{0}.$$

Como $(1,0,-1)$ tem módulo $\sqrt{2}$ a matriz não é ortogonal.

Outra forma, mais trabalhosa, e determinar a matriz de A na base canônica e ver que não é ortogonal. Isso será feito no próximo item.

Para determinar A na base canônica devemos determinar $A(1,0,0)$, $A(0,1,0)$ e $A(0,0,1)$. Temos

$$A(0,1,-1) = A(1,1,0) - A(1,0,1) = (1,0,1) - (0,1,1) = (1,-1,0).$$

Logo

$$A(0,2,0) = A(0,1,-1) + A(0,1,1) = (1,-1,0) + (1,0,1) = (2,-1,1).$$

Portanto,

$$A(0,1,0) = (1,-1/2,1/2).$$

Finalmente,

$$A(1,0,0) = A(1,1,0) - A(0,1,1) = (1,0,1) - (1,-1/2,1/2) = (0,1/2,1/2)$$

e

$$A(0,0,1) = A(0,1,1) - A(0,1,0) = (1,0,1) - (1,-1/2,1/2) = (0,1/2,1/2)$$

Logo a matriz de A na base canônica é

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Verifique que os resultados estão certos (aplique a matriz aos vetores $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ e $(1,0,1)$ e veja o resultado).

Para o último item considere a base

$$\gamma = \{u = (1,1,0), v = (1,0,1), w = (0,1,1)\}.$$

Observe que $A(u) = v$, $A(v) = w$ e $A(w) = v$. Logo a matriz de A na base γ é a matriz do problema.

4) Considere a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & a & b \\ -1/3 & 2/3 & c \\ -1/3 & -1/3 & d \end{pmatrix}.$$

4.a) Determine a, b, c e d para que P represente uma projeção ortogonal em um plano. Determine a equação do plano de projeção.

4.b) Considere agora a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Determine os autovalores de A.

4.c) Finalmente considere a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Interprete geometricamente B. Nos casos envolvendo projeções determine a reta ou plano de projeção, nos casos envolvendo espelhamentos determine o plano ou reta de espelhamento, e nos casos envolvendo rotações determine o ângulo e o eixo de rotação.

Resposta: A matriz P deve ser simétrica. Portanto, $a = -1/3 = b = c$. Para determinar d use que a matriz deve ter traço dois, pois se trata de uma projeção em um plano que tem autovalores 1 (de multiplicidade 2) e 0, logo o traço é $1+1+0 = 2$. Logo $2/3+2/3+d = 2$, $d = 2/3$. De outra forma: d é dado pelo fato do determinante ser zero. De outra forma, d é dado pelo fato do vetor $(-1/3, -1/3, d)$ pertencer ao plano paralelo a $(2/3, -1/3, -1/3)$ e $(-1/3, 2/3, -1/3)$.

Para determinar o plano observe que $P(i) = (2/3, -1/3, -1/3)$ e $P(j) = (-1/3, 2/3, -1/3)$ são vetores paralelos ao plano de projeção. Logo o vetor norma é paralelo a $(2, -1, -1) \times (-1, 2, -1) = (3, 3, 3)$. Logo o plano de projeção é $x + y + z = 0$.

Observe que a matriz A é semelhante à matriz triangular

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

pois $A = PTP^{-1}$ onde P é a matriz ortogonal

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Como matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores é suficiente determinar os autovalores de T. Observe que os autovalores de uma matriz triangular são os elementos da diagonal, logo os autovalores de T (e portanto os de A) são 2, 3 e 4.

Para o último item considere a base ortonormal

$$\beta = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\}.$$

A matriz de B na base β é

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que representa uma projeção no plano paralelo aos vetores $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ e $(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$ seguida de uma multiplicação por 2. Por construção o vetor normal de tal plano é $(1, -1, 1)$, logo o plano de projeção é $x - y + z = 0$.