GABARITO P2 2012.2 - MAT1154

PUC Que Pariu!

Questão 1:

a) Utilizaremos cálculo funcional para calcularmos A^n:

$$A^n = \alpha_n \cdot A + \beta_n$$

Isto é válido se e somente se:

$$\lambda^n = \alpha_n . \lambda + \beta_n \cdot I$$
$$n\lambda^{n-1} = \alpha_n$$

Onde λ é o autovalor duplo (1) da matriz A. Sendo assim, temos:

$$\alpha_n = n$$
$$\beta_n = 1 - n$$

Logo:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Suponhamos a existência de uma solução particular constante $Y_{p_n} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$. Substituindo na equação de diferenças, temos:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = C_1 + C_2 + 1$$

$$C_2 = -1$$

O valor da constante C_1 pode ficar em aberto, visto que não há restrições para a mesma. Sendo assim, uma solução possível é $Y_{p_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Sabemos que a solução geral da equação é dada pela soma de sua solução homogênea $\left(Y_{h_n} = A^n \cdot \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \right)$ com sua solução particular:

$$Y_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} + Y_{p_n}$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_3 + C_4 &= 1 \\ C_4 = 2 \Rightarrow C_3 &= -1 \end{aligned}$$

Logo, uma solução possível é:

$$Y_n = \begin{pmatrix} 2 - n \\ -2 \end{pmatrix}$$

Questão 2:

a)

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Sejam $\lambda_1 = 1 + 3i$ e $\lambda_2 = 1 - 3i$ os autovalores de A, sabemos que:

$$e^{At} = \alpha(t) \cdot A + \beta(t) \cdot I$$

Se e somente se:

$$e^{(-1+3i)t} = \alpha(t).(-1 + 3i) + \beta(t)$$
$$e^{(-1-3i)t} = \alpha(t).(1 - 3i) + \beta(t)$$

Entretanto, sabe-se que:

$$e^{ix} = \cos(x) + i.\sin(x)$$

Logo, podemos reformular nossas equações de cálculo funcional da seguinte forma:

$$e^{-t}.(\cos(3t) + i.\sin(3t)) = \alpha(t).(-1 + 3i) + \beta(t)$$
$$e^{-t}.(\cos(3t) - i.\sin(3t)) = \alpha(t).(-1 - 3i) + \beta(t)$$

Donde:

$$\alpha(t) = \frac{e^{-t}}{3}\sin(3t)$$
$$\beta(t) = \frac{3e^{-t}.\cos(3t) - e^{-t}.\sin(3t)}{3}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -\alpha(t) + \beta(t) & -\alpha(t) \\ 9\alpha(t) & -\alpha(t) + \beta(t) \end{pmatrix}$$
$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{3e^{-t}.\cos(3t) - 2e^{-t}.\sin(3t)}{3} & -\frac{e^{-t}}{3}\sin(3t) \\ 3e^{-t}.\sin(3t) & \frac{3e^{-t}.\cos(3t) - 2e^{-t}.\sin(3t)}{3} \end{pmatrix}$$

b) A solução geral será dada pela soma da homogênea com a particular:

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t)$$

Onde $Y_h(t) = e^{At} \cdot \vec{c}$, sendo $\vec{c}$ um vetor constante que depende da condição inicial e, portanto, deve se manter como incógnita neste item.
Podemos "chutar" uma solução particular que seja semelhante a $b(t)$:

$$Y_p(t) = \begin{pmatrix} C_1.e^{-t} \\ C_2.e^{-t} \end{pmatrix}$$

Jogando $Y_p(t)$ e sua respectiva derivada no sistema, temos:

$$-C_1.e^{-t} = -C_1.e^{-t} - C_2.e^{-t} + e^{-t}$$
$$-C_2.e^{-t} = 9C_1.e^{-t} - C_2.e^{-t} + e^{-t}$$

Logo, é trivial que:

$$C_1 = -\frac{1}{9}$$
$$C_2 = 1$$

Sendo assim, temos a seguinte solução:

$$Y(t) = e^{At}.\vec{c} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{9}e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

c) Seja $\vec{c} = \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$, temos:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{A.0} \cdot \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Logo:

$$C_3 = \frac{10}{9}$$
$$C_4 = 0$$

Sendo assim, nossa solução geral será:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \frac{10}{27}e^{-t}(\cos(3t) - 2.\sin(3t)) - \frac{1}{9}e^{-t} \\ \frac{10}{3}e^{-t}.\sin(3t) + e^{-t} \end{pmatrix}$$

d)

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = \vec{0}$$

Questão 3:

a) Suponhamos o seguinte vetor $Y(t)$:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Vamos agora encontrar a matriz A que satisfaz o sistema $Y'(t) = A.Y(t)$:

$$\begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Logo, vemos que A é uma matriz real e, ao passo que $\lim_{t\to\infty} y_1(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty} y_2(t) = 0$. Portanto, a afirmação é **FALSA.**

b) Suponhamos a existência de uma matriz A, tal que $A = B^2$. Portanto, B seria a raiz quadrada de A. Sabemos que, válida esta relação, também é verdadeiro que $\det(A) = (\det(B))^2$. Visto que $\det(B) \in \mathbb{R}$, obrigatoriamente $\det(A) > 0$. Sendo assim, a afirmação é **FALSA**, pois uma matriz com o determinante menor do que zero náo pode possuir raiz quadrada.

c) Suponhamos o seguinte vetor:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

Nota-se que a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ resolve o sistema $Y'(t) = A.Y(t)$. Além disso, é trivial que $e^{2t} = (e^t)^2$ e, portanto, que $x(t) = y^2(t)$. A curva dada na proposição do enunciado $(y^4 - x^2 = 0)$ nada mais é do que a junção das curvas $y^2 = \pm x$ e o retrato de fases do sistema por nós moldado é a curva $y^2 = x$. Portanto, a curva proposta contém a solução de um sistema do tipo $Y'(t) = A.Y(t)$, o que faz da afirmação **VERDADEIRA**.

Questão 4:

O ideal para a resolução de tal questão é descobrir os autovalores de todas as matrizes utilizando-se de métodos como avaliação de seu traço e determinante, de forma que se chegue aos resultados de forma trivial.

Feito isso, compara-se os autovalores encontrados aos retratos de fases fornecidos na questão. Resumindo: o segredo está em encontrar os autovalores de forma rápida e precisa!

Figura 1: Este retrato de fases é típico de uma matriz com um dos autovalores 0, o que gera uma reta de pontos de equilíbrio. Logo, a matriz que se encaixa é a matriz **A**.

Figura 2: Esta figura mostra um ponto de sela, retrato de fases característico de uma matriz que possui um autovalor positivo e o outro negativo. Logo, nossa matriz é a **H**.

Figura 3: Este retrato de fases é um centro, característico de uma matriz que possui autovalores complexos puros. Logo, a matriz procurada é a matriz **B**.

Figura 4: Trata-se de uma espiral instável, retrato de fases proveniente de uma matriz com autovalores complexos e de parte real maior do que zero. Sendo assim, nossa matriz é a **D**.

Figura 5: Trata-se de um nó repulsor, porém um caso especial. Repararam na simetria da figura? Isso ocorre pois ambos os autovalores são iguais, positivos e

possuem autovetores diferentes. Isso porque a sua matriz é diagonalizável. Visto que a matriz possui autovalores iguais e é diagonalizável, ela, além de ser múltipla da matriz identidade, possui qualquer vetor no $\mathbb{R}^3$ como autovetor. Logo, as setas do retrato de fases podem apontar para todas as direções, visto que estas são dadas pelos autovetores. Sendo assim, nossa matriz é a **G**.
Fica a dica: matriz com os autovalores iguais só é diagonalizável se for múltipla da identidade e só vai gerar esse nó "bonitinho" se for esse o caso. Se ela tiver autovalores iguais e não for diagonalizável, seu retrato de fases será o que chamamos de nó impróprio.

Figura 6: Isso é um nó instável (ou repulsor), o que significa que a matriz correspondente possui autovalores positivos e diferentes entre si. Logo, a resposta é a matriz **C**.

Figura 7: Aqui temos uma espiral estável, o que significa que nossa matriz possui autovalores complexos com parte real menor do que zero. Logo, estamos falando da matriz **E**.

Figura 8: Este retrato de fases é um nó estável (ou repulsor), o que indica que a matriz que o "gera" possui autovalores negativos e diferentes entre si. Logo, nossa matriz é a **F**.

Gabarito/resolução de autoria de Marcelo Coelho Martins