# Gabarito da P1, 2013.2

## Questão 1

**item (a)**:

A matriz jacobiana de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada por

$$Df(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}_{1 \times n}$$

e a matriz jacobiana de $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ para $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \cdots, \alpha_n(t))$ é dada por

$$D\alpha(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1'(t) \\ \vdots \\ \alpha_n'(t) \end{bmatrix}_{n \times 1}.$$

**item (b)**:

Tomando $v = (v_1, \cdots, v_n)$ temos que

$$D\alpha(t) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_{n \times 1},$$

$$Df(\alpha(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha(t)) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\alpha(t)) \end{bmatrix}_{n \times 1},$$

donde resulta que

$$Dh(t) = Df(\alpha(t)) \cdot D\alpha(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha(t))v_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\alpha(t))v_n \end{bmatrix}_{1 \times 1}.$$

**item (c)**:

Ora, $\alpha(t) = (1 - t, 0)$,

$$D\alpha(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{2 \times 1},$$

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - y^2 & -2xy \end{bmatrix}_{1 \times 2},$$

logo

$$Dh(t) = Df(\alpha(t)) \cdot D\alpha(t) = \begin{bmatrix} 2(1 - t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t - 2 \end{bmatrix}_{1 \times 1}.$$

# Questão 2

**item (a)**:

Uma conta simples mostra que $x = \frac{u+v}{2}$ e $y = \frac{u-v}{2}$. Então $T(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$ e $T^{-1}(x,y) = (x+y, x-y)$. Logo $D^*$ consiste no triângulo de vértices $(1,1)$, $(0,2)$ e $(2,2)$.

**item (b)**:

A matrix jacobiana da mudança de variáveis é

$$DT(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

**item (c)**:

A transformação $T$ é injetora, pois $T(u_1, v_1) = T(u_2, v_2)$ é equivalente a

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \\ u_1 - v_1 = u_2 - v_2 \end{cases}$$

Somando as equações obtemos $u_1 = u_2$, donde resulta que $v_1 = v_2$. Daqui se conclui que $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$, ou seja $T$ é injetora.

**item (d)**:

$$\mathcal{I} = \iint\limits_{D} (x+y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D^*} \frac{u}{2}\,du\,dv = \int_1^2 \int_{2-v}^{v} \frac{u}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}.$$

# Questão 3

O volume do sólido corresponde a

$$V(\mathbf{S}) = \iint\limits_{D} (a - x^2 - y^2)\,dA,$$

onde $D$ é a projeção de $\mathbf{S}$ no plano $z = 0$, ou seja, $D$ é o disco de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{a}$.

Usando a mudança de variáveis $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, temos que

$$a - x^2 - y^2 = a - r^2$$

e o jacobiano da mudança de variáveis é

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r\cos^2(\theta) + r\,\mathrm{sen}^2(\theta) = r > 0.$$

Então, no plano $z = 0$ tem-se que $a = x^2 + y^2 = r^2$, donde resulta que $r \in [0, \sqrt{a}]$ e

$$V(\mathbf{S}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a}} (a - r^2) r\,dr\,d\theta = 2\pi \Big[a\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{a}} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

# Questão 4

**item (a): VERDADEIRA.**

Usando a regra da cadeia temos que

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\,\mathrm{sen}(\theta)$$

e

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) = -\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)) r\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)) r\cos(\theta).$$

Então

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) = 2r\cos^2(\theta) + r\,\mathrm{sen}^2(\theta) = 2r$$

e

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) = -2r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + 2r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) = 0.$$

**item (b): FALSA.**

Basta usar a regra da cadeia para obter

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = {} & \frac{2}{x} - \mathrm{sen}(x) g'(\cos(x)) \\ & + \frac{\partial h}{\partial u}\Big(x^3 z + 3yz, z\,\mathrm{sen}(x)\Big) 3x^2 z + \frac{\partial h}{\partial v}\Big(x^3 z + 3yz, z\,\mathrm{sen}(x)\Big) z\cos(x).\end{aligned}$$