Gabarito da P2, 2013.2

Questão 1

item (a): Por definição de trabalho $\mathbf{W}$ tem-se que

$$\mathbf{W} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot dr = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Uma conta simples mostra que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = g\left(\frac{\pi t}{2}\right)\frac{\pi t}{2}$. Fazendo a mudança de variável $u = \pi t/2$, obtém-se

$$\mathbf{W} = \int_0^{\pi/2} u g(u)\, du,$$

como era pretendido.

item (b): Como o campo vetorial $\mathbf{F}$ está definido em $\mathbb{R}^2$ e as suas funções componentes tem derivadas parciais contínuas, pois g é de classe C^1, então para que $\mathbf{F}$ seja um campo conservativo temos que ter

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}(x, y)$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, onde $\mathbf{P}(x, y) = g(x)(x \text{ sen}(y) + y \cos(y))$ e $\mathbf{Q}(x, y) = g(x)(x \cos(y) - y \text{ sen}(y))$. Isso nos diz que

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = 1.$$

Integrando ambos os membros da igualdade anterior desde 0 até x, notando que $(\log(g(x)))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$ e que $g(0) = e^{-\pi/2}$ vem que $g(x) = e^{x-\pi/2}$.

item (c): Seja $f(x, y)$ um campo escalar que seja uma função potencial para o campo vetorial $\mathbf{F}$. Então

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \mathbf{P}(x, y) \\ vspace1mm\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \mathbf{Q}(x, y). \end{cases}$$

Primeiro vai-se integrar ambos os membros da primeira igualdade acima, com respeito a x. Então tem-se

$$f(x, y) = e^{x-\pi/2} x \text{ sen}(y) - e^{x-\pi/2} \text{ sen}(y) + e^{x-\pi/2} y \cos(y) + h(y).$$

Derivando, em ordem a y, ambos os membros da igualdade anterior obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x-\pi/2} x\cos(y) - e^{x-\pi/2} y\ \mathrm{sen}(y) + h'(y).$$

Comparando com a expressão acima vem que $h'(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Daqui resulta que $h(y) = K$, onde K é uma constante. Então a família de funções potenciais para o campo vetorial $\mathbf{F}$ é dada por:

$$f_K(x,y) = e^{x-\pi/2}(x-1)\ \mathrm{sen}(y) + e^{x-\pi/2} y\cos(y) + K.$$

item (d): O trabalho é dado por

$$\mathbf{W} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot dr = \int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot dr,$$

onde $f := f_K$ para algum K. Pelo Teorema fundamental dos integrais de linha tem-se que

$$\mathbf{W} = f(\mathbf{r}(1)) - f(\mathbf{r}(0)) = \frac{\pi}{2} - 1 + e^{-\pi/2}.$$

Questão 2

item (a): Pelo Teorema de Green tem-se que

$$\mathcal{I} = \iint_D \Big(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y}(x,y)\Big) dA,$$

onde $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\,,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

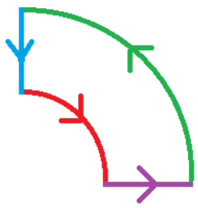
Uma conta simples mostra que

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y}(x,y) = \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares tomando $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, então tem-se que

$$\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \frac{1}{r} 4\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta)\, dr\, d\theta = 2\ln(2).$$

item (b): O domínio D é limitado por quatro curvas, veja a figura abaixo.



Então pode-se escrever

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

onde as curvas $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$ estão representadas a vermelho, roxo, verde e azul, respetivamente.

Primeiro vai-se parametrizar $-\mathcal{C}_1$ por $\mathbf{r}_1(t) = (\cos(t), \mathrm{sen(t)})$, com $t \in [0, \pi/2]$. Então

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{-\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_0^{\pi/2} 2\ \mathrm{sen(t)} \cos(t) dt = 1.$$

Agora, pode-se parametrizar $\mathcal{C}_2$ por $\mathbf{r}_2(t) = (t, 0)$, com $t \in [1, 2]$. Então

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln(2).$$

Para parametrizar $\mathcal{C}_3$ toma-se, por exemplo, $\mathbf{r}_3(t) = (2\cos(t), 2\mathrm{sen(t)})$, com $t \in [0, \pi/2]$. Então

$$\int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} 2\ \mathrm{sen(t)} \cos(t) dt = 1.$$

Finalmente, pode-se parametrizar $-\mathcal{C}_4$ por $\mathbf{r}_4(t) = (0, t)$, com $t \in [1, 2]$. Então

$$\int_{\mathcal{C}_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{-\mathcal{C}_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln(2).$$

Daqui resulta que $\mathcal{I} = 2\ln(2)$.

Questão 3

item (a):

$$\nabla \mathbf{f} \times \nabla \mathbf{g} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \\ \partial_x \mathbf{g} & \partial_y \mathbf{g} & \partial_z \mathbf{g} \end{vmatrix}$$

Então

$$\nabla \mathbf{f} \times \nabla \mathbf{g} = \Big(\partial_y f \partial_z \mathbf{g} - \partial_z f \partial_y \mathbf{g}, \partial_z f \partial_x \mathbf{g} - \partial_x f \partial_z \mathbf{g}, \partial_x f \partial_y \mathbf{g} - \partial_y f \partial_x \mathbf{g}\Big).$$

Daqui resulta que

$$\begin{aligned} div(\nabla \mathbf{f} \times \nabla \mathbf{g}) &= \partial_x(\partial_y \mathbf{f} \partial_z \mathbf{g} - \partial_z \mathbf{f} \partial_y \mathbf{g}) + \partial_y(\partial_z \mathbf{f} \partial_x \mathbf{g} - \partial_x \mathbf{f} \partial_z \mathbf{g}) + \partial_z(\partial_x \mathbf{f} \partial_y \mathbf{g} - \partial_y \mathbf{f} \partial_x \mathbf{g}) \\ &= (\partial_x \partial_y \mathbf{f})\partial_z \mathbf{g} + \partial_y \mathbf{f}(\partial_x \partial_z \mathbf{g}) - (\partial_x \partial_z \mathbf{f})\partial_y \mathbf{g} - \partial_z \mathbf{f}(\partial_x \partial_y \mathbf{g}) \\ &+ (\partial_y \partial_z \mathbf{f})\partial_x \mathbf{g} + \partial_z \mathbf{f}(\partial_y \partial_x \mathbf{g}) - (\partial_y \partial_x \mathbf{f})\partial_z \mathbf{g} - \partial_x \mathbf{f}(\partial_y \partial_z \mathbf{g}) \\ &+ (\partial_z \partial_x \mathbf{f})\partial_y \mathbf{g} + \partial_x \mathbf{f}(\partial_z \partial_y \mathbf{g}) - (\partial_z \partial_y \mathbf{f})\partial_x \mathbf{g} - \partial_y \mathbf{f}(\partial_z \partial_x \mathbf{g}) \\ &= (\partial_x \partial_y \mathbf{f})\partial_z \mathbf{g} - (\partial_y \partial_x \mathbf{f})\partial_z \mathbf{g} + \partial_y \mathbf{f}(\partial_x \partial_z \mathbf{g}) - \partial_y \mathbf{f}(\partial_z \partial_x \mathbf{g}) \\ &+ (\partial_z \partial_x \mathbf{f})\partial_y \mathbf{g} - (\partial_x \partial_z \mathbf{f})\partial_y \mathbf{g} + \partial_z \mathbf{f}(\partial_y \partial_x \mathbf{g}) - \partial_z \mathbf{f}(\partial_x \partial_y \mathbf{g}) \\ &+ (\partial_y \partial_z \mathbf{f})\partial_x \mathbf{g} - (\partial_z \partial_y \mathbf{f})\partial_x \mathbf{g} + \partial_x \mathbf{f}(\partial_z \partial_y \mathbf{g}) - \partial_x \mathbf{f}(\partial_y \partial_z \mathbf{g}). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Clairaut como as derivadas mistas não dependem da ordem de derivação resulta que $div(\nabla \mathbf{f} \times \nabla \mathbf{g}) = \mathbf{0}$.

item (b): Uma conta simples mostra que

$$rot(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^{xy} & -\cos(y) & \text{sen}^3(z)) \end{vmatrix} = (0, 0, -xe^{xy}).$$

Então como $rot(\mathbf{F}) \neq (0, 0, 0)$, resulta que $\mathbf{F}$ não tem potencial escalar. Por outro lado, se $\mathbf{F}$ tivesse potencial vetor, então $div(\mathbf{F}) = 0$. No entanto, uma conta simples mostra que $div(\mathbf{F})(x, y, z) = ye^{xy} + \text{sen}(y) + 3\text{sen}^2(z)\cos(z) \neq 0$, donde se conclui que $\mathbf{F}$ não tem potencial vetor.