P1 de Cálculo a várias variáveis II
MAT 1163 — 2013.2
3 de setembro de 2013

Nome: ______________________________

Assinatura: ______________________________

Matrícula: ______________________________ Turma: ______________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1.a	1.0		
1.b	1.0		
1.c	1.0		
2.a	1.5		
2.b	0.5		
2.c	0.5		
2.d	1.0		
3.	1.5		
4.a	1.0		
4.b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- **A duração da prova é de uma 1 hora e 50 minutos.**
- **Leia atentamente o enunciado de cada questão.**
- **Não é permitido usar calculadora. Respostas finais com caneta.**
- **Não serão aceitas respostas sem justificativa.**
- **Não destaque as folhas da prova.**
- **Escreva as respostas e/ou desenvolvimentos de cada questão de forma *ordenada* e *legível* no espaço designado “Solução”. Soluções fora do lugar NÃO serão corrigidas.**

Questão 1

Sejam $p, v \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ a curva parametrizada definida por $\alpha(t) = p + t \cdot v$.

(a) Calcule a matriz jacobiana de f e de α.

(b) Calcule a derivada de $h := f \circ \alpha$ no ponto t.

(c) Repita os itens anteriores para $n = 2$, $p = (1, 0)$, $v = (-1, 0)$ e $f(x, y) = x^2 - y^2 x$.

Solução:

Questão 2

Considere a integral

$$\mathcal{I} = \iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$$

onde D é o triângulo de vértices nos pontos $(1,0)$, $(2,0)$ e $(1,-1)$.

(a) Usando a mudança de variáveis $T(u,v) = (x,y)$ com $u = x+y$ e $v = x-y$, encontre a região D^* tal que $T(D^*) = D$ e esboce D e D^*.

(b) Determine a matriz jacobiana $DT(u,v)$.

(c) Mostre que T é injetora.

(d) Calcule a integral dada usando a fórmula de mudança de variáveis.

Solução:

Questão 3

Seja $a > 0$. Mostre que o volume do sólido $\mathbf{S}$ limitado pelo plano $z = 0$ e pelo parabolóide $z = a - x^2 - y^2$ é igual a:

$$V(\mathbf{S}) = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Sugestão: Use coordenadas polares. Justifique.

Solução:

Questão 4

Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando. (**aviso:** resposta errada ou resposta certa sem justificativa receberá zero no respetivo item.)

(a) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $h(r, \theta) := f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))$, então

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) = 2r$$

(b) Para $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \ln\left(x^2 y\right) + g(\cos(x)) + h\Big(x^3 z + 3yz, z\,\mathrm{sen}(x)\Big)$$

onde

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

é uma função de classe C^2 e

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \mapsto & h(u, v) \end{array}$$

é uma função de classe C^2, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = {} & \frac{2}{x} + g'(\cos(x)) \\ & + \frac{\partial h}{\partial u}\Big(x^3 z + 3yz, z\,\mathrm{sen}(x)\Big)3x^2 z + \frac{\partial h}{\partial v}\Big(x^3 z + 3yz, z\,\mathrm{sen}(x)\Big)z\cos(x). \end{aligned}$$