P3 de Cálculo a várias variáveis II
MAT 1163 — 2013.2
19 de novembro de 2013

Nome: ______________________________

Assinatura: ______________________________

Matrícula: ______________________ Turma: __________

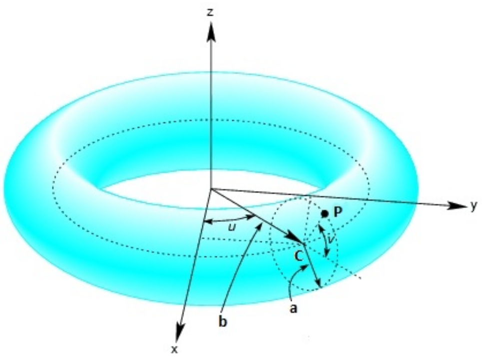
Questão	Valor	Nota	Revisão
1.a	1.0		
1.b	1.0		
1.c	1.5		
2.a	1.5		
2.b	1.5		
2.c	0.5		
3.a	1.5		
3.b	1.5		
Total	10.0		

Instruções

- **A duração da prova é de uma 1 hora e 50 minutos.**
- **Leia atentamente o enunciado de cada questão.**
- **Não é permitido usar calculadora. Respostas finais com caneta.**
- **Não serão aceitas respostas sem justificativa.**
- **Não destaque as folhas da prova.**
- **Escreva as respostas e/ou desenvolvimentos de cada questão de forma *ordenada* e *legível* no espaço designado "Solução". Soluções fora do lugar NÃO serão corrigidas.**

Questão 1

Observe a figura abaixo que representa o toro obtido girando em torno do eixo z uma círcunferência com centro no ponto $\mathbf{C}$ e com raio a. A distância do ponto $\mathbf{C}$ à origem é $b > a$.



(a) Mostre que $r(u,v) = ((b + a\cos(v))\cos(u), (b + a\cos(v))\,\mathrm{sen}(u), a\,\mathrm{sen}(v))$, é a representação paramétrica do toro, onde $u, v \in [0, 2\pi]$.

(b) Calcule o vetor normal ao toro no ponto $(b, 0, a)$.

(c) Calcule a área do toro.

Solução:

Questão 2

Considere a superfície $\mathcal{S}$ que é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cone $y^2 = x^2 + z^2$ com $y \geq 0$ e com os vetores normais apontando para fora. Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$.

(a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\mathcal{I} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathcal{S}$.

(b) Sem usar o Teorema de Stokes, calcule $\mathcal{I}$ usando uma superfície apropriada.

(c) Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{G}(x, y, z) = -y(2 + x)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ através de $\mathcal{S}$.

Solução:

Questão 3

(a) Sejam f e g funções escalares definidas em $\mathbb{R}^3$ de classe C^2 e seja $\mathcal{S}$ a superfície fronteira de uma região sólida $\mathbf{E}$. Suponha que estamos nas condições do Teorema de Gauss. Mostre que

$$\iint_{\mathcal{S}} (f\nabla g) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_{\mathbf{E}} (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV,$$

onde $\nabla^2 g = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2}$.

(b) Mostre que a equação $\cos(x^2 y) + e^{xz} = x$ define x como função implícita de y e z numa vizinhança de $\left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)$. Calcule $\frac{\partial x}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Solução: