Gabarito da P3, 2013.2

Questão 1

item (a): Considere o ponto $P = (x, y, z)$ representado na figura. É facil ver que $z = a\,\text{sen}(v)$. A projeção de P no plano $z = 0$ corresponde ao ponto que se designa por P'. Então $P' = (x, y, 0)$ e

$$x = \|P'\|\cos(u) \quad y = \|P'\|\,\text{sen}(u),$$

onde $\|P'\| = b + a\cos(v)$. Sendo assim obtém-se a representação de qualquer ponto (x, y, z) no toro, em função dos parâmetros $u, v \in [0, 2\pi]$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} x &= (b + a\cos(v))\cos(u) \\ y &= (b + a\cos(v))\,\text{sen}(u) \\ z &= a\,\text{sen}(v). \end{aligned}$$

item (b): Fazendo uma conta simples tem-se que

$$\begin{aligned} r_u &= (-(b + a\cos(v))\,\text{sen}(u), (b + a\cos(v))\cos(u), 0) \\ r_v &= (-a\,\text{sen}(v)\cos(u), -a\,\text{sen}(v)\,\text{sen}(u), a\cos(v)). \end{aligned}$$

Daqui resulta que, designando por $n(u, v)$ o vetor normal no ponto $r(u, v)$, tem-se que

$$n(u,v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -(b + a\cos(v))\text{sen}(u) & (b + a\cos(v))\cos(u) & 0 \\ -a\text{sen}(v)\cos(u) & -a\text{sen}(v)\text{sen}(u) & a\cos(v) \end{vmatrix}$$

$$= (a(b{+}a\cos(v))\cos(u)\cos(v), a(b{+}a\cos(v))\cos(v)\text{sen}(u), a(b{+}a\cos(v))\text{sen}(v)).$$

É fácil de verificar que o ponto $(b, 0, a)$ corresponde a $u = (0, \pi/2)$. Logo o vetor normal pedido é $n(0, \pi/2) = (0, 0, ba)$.

item (c): Uma conta simples mostra que $\|(r_u \times r_v)(u, v)\| = a(b + a\cos(v))$. Logo, a área do toro é igual a

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \|(r_u \times r_v)(u, v)\|\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a(b + a\cos(v))\,du\,dv = 4\pi^2 ab.$$

Questão 2

item (a): Pelo Teorema de Stokes, sabe-se que

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot dr$$

onde $\mathcal{C}$ é a curva fronteira de $\mathcal{S}$, orientada no sentido positivo.

A curva fronteira, corresponde à circunferência de centro no ponto $(0, \sqrt{2}, 0)$ e com raio $\sqrt{2}$. Seja

$$r(t) = (\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}, -\sqrt{2}\mathrm{sen}(t)),$$

com $t \in [0, 2\pi]$ a parametrização de $\mathcal{C}$.

Logo

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\cos(t)\mathrm{sen}^2(t) + 2\sqrt{2}\cos(t)\, dt = 0.$$

item (b): Para facilitar os cálculos vai-se considerar o círculo, parametrizado por $r(\rho, \theta) = (\rho\cos(\theta), \sqrt{2}, \rho\,\mathrm{sen}(\theta))$, com $\rho \in [0, \sqrt{2}]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Então

$$\begin{aligned} r_\rho &= (\cos(\theta), 0, \mathrm{sen}(\theta)) \\ r_\theta &= (-\rho\mathrm{sen}(\theta), 0, \rho\cos(\theta)). \end{aligned}$$

Daqui resulta que o vetor normal é $(0, \rho, 0)$. Por outro lado, uma conta simples mostra que

$$(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = -y(2 + x)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}.$$

Sendo assim,

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cos(\theta)\, d\rho\, d\theta = 0.$$

item (c): Pelo item anterior, basta ver que $G = \nabla \times \mathbf{F}$, donde resulta que o fluxo pedido é nulo.

Questão 3

item (a): Seja $\mathbf{F}$ o campo vetorial dado por $\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\nabla g(x,y,z)$, ou seja

$\mathbf{F}(x,y,z) = (f(x,y,z)\partial_x g(x,y,z), f(x,y,z)\partial_y g(x,y,z), f(x,y,z)\partial_z g(x,y,z))$.

Então pelo teorema de Gauss sabemos que

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_{\mathbf{E}} div(\mathbf{F})\, dV.$$

Então para provarmos a igualdade basta calcular o divergente de $\mathbf{F}$. Ora,

$$\begin{aligned} div(\mathbf{F}) = div(f\nabla g) &= \partial_x f \partial_x g + f\partial_x^2 g + \partial_y f \partial_y g + f\partial_y^2 g + \partial_z f\partial_z g + f\partial_z^2 g \\ &= f(\partial_x^2 g + \partial_y^2 g + \partial_z^2 g) + \partial_x f\partial_x g + \partial_y f\partial_y g + \partial_z f\partial_z g \\ &= f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g, \end{aligned}$$

onde $\nabla^2 g = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2}$.

item (b): Seja $\mathbf{F}$ o campo vetorial dado por $\mathbf{F}(x,y,z) = \cos(x^2 y) + e^{xz} - x$. Então é fácil ver que $\mathbf{F}\Big(1, \frac{\pi}{2}, 0\Big) = 0$ e que

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(x,y,z) = -2xy\text{sen}(x^2 y) + ze^x - 1,$$

logo

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\Big(1, \frac{\pi}{2}, 0\Big) = -(\pi+1).$$

Então, pelo teorema da função implícita a equação $\mathbf{F}(x,y,z) = 0$ define x como função implícita de y e z numa vizinhança de $\Big(1, \frac{\pi}{2}, 0\Big)$. Além disso,

$$\frac{\partial x}{\partial y}\Big(\frac{\pi}{2}, 0\Big) = -\frac{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\Big(1, \frac{\pi}{2}, 0\Big)}{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\Big(1, \frac{\pi}{2}, 0\Big)} = \frac{-1}{\pi+1}.$$