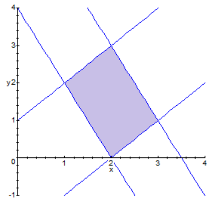
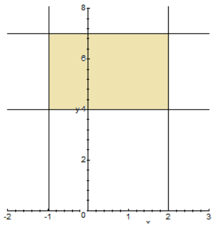
Gabarito da P4, 2013.2

Questão 1

(a) A representação do domínio D está abaixo:



Uma conta simples, mostra que $x(u,v) = (u+v)/3$ e $y(u,v) = (v-2u)/3$, donde resulta que o jacobiano desta mudança de variáveis é igual a $1/3$. Por outro lado, é facil ver que o domínio D corresponde ao domínio R nas coordenadas u e v, onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, 4 \leq y \leq 7\}$, e cuja representação está abaixo:



Sendo assim, pela fórmula de mudança de variáveis no $\mathbb{R}^2$, tem-se que

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^{2} \int_{4}^{7} \frac{u}{3} \, dv \, du = \frac{3}{2}.$$

(b) Pelo esboço de D acima e fazendo uma conta simples, tem-se que

$$\mathcal{I} = \int_{1}^{2} \int_{-2x+4}^{x+1} (x-y) \, dy \, dx + \int_{2}^{3} \int_{x-2}^{-2x+7} (x-y) \, dy \, dx.$$

Questão 2

(a) A parametrização da curva $\mathcal{C}$ é dada por $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, onde $t \in [0, 2\pi]$. Logo $\alpha'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$. Então, pela definição de integral de linha, tem-se que

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}_1(\alpha(t)) \cdot (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

(b) O campo vetorial $\mathbf{F}_1$ não é conservativo, pois se fosse, então em (a) a resposta obtida teria sido 0, uma vez que $\mathcal{C}$ é uma curva fechada.

(c) Pelo critério de conservatividade no $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}_2$ é conservativo, uma vez que o domínio do campo vetorial é $\mathbb{R}^2$, as funções componentes do campo $\mathbf{P}_2(x, y) = 3x^2y + y$ e $\mathbf{Q}_2(x, y) = x^3 + x + 1$ tem derivadas parciais contínuas e as derivadas parciais abaixo são iguais

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial x}(x, y) = 3x^3 + 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial y}(x, y) = 3x^3 + 1.$$

(d) Seja $f(x, y)$ um campo escalar que seja uma função potencial para o campo vetorial $\mathbf{F}_2$. Então

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \mathbf{P_2}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \mathbf{Q_2}(x, y). \end{cases}$$

Primeiro vai-se integrar ambos os membros da primeira igualdade acima, com respeito a x. Então tem-se que $f(x, y) = x^3y + xy + h(y)$. Derivando, em ordem a y, ambos os membros da igualdade anterior obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 + x + h'(y).$$

Comparando com a expressão acima vem que $h'(y) = 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Daqui resulta que $h(y) = y + K$, onde K é uma constante. Então a família de funções potenciais para o campo vetorial $\mathbf{F_2}$ é dada por $f_K(x, y) = x^3y + xy + y + K$.

(e) Pelo Teorema Fundamental dos integrais de linha tem-se que $\mathcal{I}_2 = f_K(1, 1) - f_K(0, 0)$, uma vez que o ponto final e o ponto inicial da curva em questão são, respetivamente, $(1, 1)$ e $(0, 0)$. Uma conta simples mostra que $f_K(1, 1) = 3 + K$ e $f_K(0, 0) = K$, donde resulta que $\mathcal{I}_2 = 3$.

Questão 3

(a) O volume do cone é dado por

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} 1\,dz\,dy\,dx.$$

Agora, faz-se a mudança para as coordenadas cilíndricas $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\text{sen}(\theta)$ e $z = z$, com $\rho \in [0,2]$, $\theta \in [0,2\pi]$ e $z \in [\rho, 2]$. Assim, a integral fica escrita na forma

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{\rho}^{2} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta,$$

donde resulta que o volume do cone é igual a $8\pi/3$.

(b) Pelo Teorema de Gauss, sabe-se que

$$\iint_{\partial E} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E div(F)\,dV,$$

onde a superfície fronteira de E tem os vetores normais apontando para fora da superfície. Pode-se aplicar o Teorema de Gauss pois as funções componentes do campo tem derivadas parciais contínuas. Uma conta simples mostra que $div(\mathbf{F}) = 1$ e portanto,

$$\iiint_E div(\mathbf{F})\,dV = vol(E).$$

Pelo item (a), sabe-se que $vol(E) = 8\pi/3$. Além disso, a superfície fronteira de E consiste em $\mathcal{S}\bigcup\mathcal{D}$, onde $\mathcal{D}$ consiste no disco parametrizado por

$r(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta),\ \rho\,\text{sen}(\theta), 2)$, com $\rho \in [0,2]$ e $\theta \in [0,2\pi]$.

Calculando $\iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ pela definição, vem que

$$\iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \mathbf{F}(r(\rho,\theta))\cdot n\,dS$$

onde n é o vetor normal a $\mathcal{D}$ apontando para fora do cone E. Contas simples mostram que $n = (0,0,\rho)$ e $\mathbf{F}(r(\rho,\theta))\cdot n = 2\rho/3$, donde resulta que

$$\iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{2\rho}{3}\,d\rho\,d\theta = \frac{8\pi}{3}.$$

Então, conclui-se que

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 0.$$