P2 de Cálculo a várias variáveis II
MAT 1163 — 2013.2
9 de outubro de 2013

Nome: ____

Assinatura: ____

Matrícula: ______________________________ Turma: ______________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1.a	1.0		
1.b	1.0		
1.c	1.0		
1.d	1.0		
2.a	1.5		
2.b	1.5		
3.a	1.5		
3.b	1.5		
Total	10.0		

Instruções

- **A duração da prova é de uma 1 hora e 50 minutos.**
- **Leia atentamente o enunciado de cada questão.**
- **Não é permitido usar calculadora. Respostas finais com caneta.**
- **Não serão aceitas respostas sem justificativa.**
- **Não destaque as folhas da prova.**
- **Escreva as respostas e/ou desenvolvimentos de cada questão de forma *ordenada* e *legível* no espaço designado "Solução". Soluções fora do lugar NÃO serão corrigidas.**

Questão 1

Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = g(x)(x \text{ sen}(y) + y \cos(y))\, \mathbf{i} + g(x)(x \cos(y) - y \text{ sen}(y))\, \mathbf{j},$$

onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $g(0) = e^{-\pi/2}$.

(a) Suponha que $\mathbf{F}$ é um campo de forças. Mostre que o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo da curva $\mathcal{C}$, representada parametricamente por $\mathbf{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{\pi t}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, é dado por

$$\int_0^{\pi/2} u g(u) du.$$

(b) Sem calcular funções potenciais, encontre a função g de tal modo que $\mathbf{F}$ seja um campo conservativo.

(c) Para a função g do item b), encontre a família de funções potenciais para $\mathbf{F}$.

(d) Usando o Teorema fundamental dos integrais de linha, calcule o trabalho realizado pelo campo $\mathbf{F}$ dado pela função g do item b) ao longo da curva $\mathcal{C}$ do item a). Justifique.

Solução:

Questão 2

Considere a integral de linha

$$\mathcal{I} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

onde $\mathcal{C}$ é a fronteira da região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2+y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ e $\mathbf{F}$ é o campo vetorial definido por $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-\,y}{x^2+y^2}\right)$.

(a) Calcule $\mathcal{I}$ usando obrigatoriamente o Teorema de Green.

(b) Confira o resultado do item anterior calculando $\mathcal{I}$ pela definição de integral de linha.

Solução:

Questão 3

(a) Sejam $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ campos escalares definidos em $\mathbb{R}^3$ de classe C^2. Calcule $div(\nabla\mathbf{f} \times \nabla\mathbf{g})$.

(b) Considere o campo vetorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{xy}, -\cos(y), \operatorname{sen}^3(z))$. Justique se $\mathbf{F}$ tem potencial escalar e/ou potencial vetorial.

<u>**Solução:**</u>