P4 de Cálculo a várias variáveis II
MAT 1163 — 2013.2
2 de dezembro de 2013

Nome: ____

Assinatura: ____

Matrícula: ______________________________ Turma: ______________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1.a	2.0		
1.b	1.0		
2.a	1.0		
2.b	0.5		
2.c	1.0		
2.d	1.0		
2.e	1.0		
3.a	1.0		
3.b	1.5		
Total	10.0		

Instruções

- **A duração da prova é de uma 1 hora e 50 minutos.**
- **Leia atentamente o enunciado de cada questão.**
- **Não é permitido usar calculadora. Respostas finais com caneta.**
- **Não serão aceitas respostas sem justificativa.**
- **Não destaque as folhas da prova.**
- **Escreva as respostas e/ou desenvolvimentos de cada questão de forma *ordenada* e *legível* no espaço designado "Solução". Soluções fora do lugar NÃO serão corrigidas.**

Questão 1

Considere a integral

$$\mathcal{I} = \iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy$$

onde D é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = -2x+4$, $y = -2x+7$, $y = x-2$ e $y = x+1$.

(a) Usando a mudança de variáveis $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ com $u = x - y$ e $v = 2x + y$, calcule $\mathcal{I}$.

(b) Escreva a integral em coordenadas x, y sobre o domínio D colocando os domínios de integração explícitos. (Não precisa resolver a integral).

Solução:

Questão 2

(a) Considere o campo vetorial $\mathbf{F}_1(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$. Calcule

$$\mathcal{I}_1 = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r},$$

onde $\mathcal{C}$ é a circunferência de centro em $(0,0)$ e de raio 1, orientada no sentido anti-horário.

(b) Justifique se o campo vetorial $\mathbf{F}_1$ é ou não um campo conservativo.

(c) Considere o campo vetorial $\mathbf{F}_2(x,y) = (3x^2y + y, x^3 + x + 1)$. Sem calcular funções potenciais justifique que $\mathbf{F}_2$ é um campo conservativo.

(d) Encontre a família de funções potenciais para $\mathbf{F}_2$.

(e) Calcule

$$\mathcal{I}_2 = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r},$$

onde $\mathcal{C}$ consiste no arco de parábola dado por $y = x^2$ com $x \in [0,1]$.

Solução:

Questão 3

Considere o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x/3, y/3, z/3)$ e seja $\mathcal{S}$ a superfície do cone dado por $z^2 = x^2 + y^2$ com $z \in [0, 2]$.

(a) Calcule o volume do cone sólido dado por

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2 + y^2,\ z \in [0, 2]\},$$

usando a integral tripla.

(b) Use o Teorema de Gauss para calcular

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

(Note que $\partial E \neq \mathcal{S}$).

Solução: