Cálculo III

Departamento de Matemática - ICEx - UFMG
Marcelo Terra Cunha

Teorema de Green

Agora chegamos a mais um teorema da família do Teorema Fundamental do Cálculo, mas dessa vez envolvendo integral de linha de campo vetorial e integral dupla de uma certa quantidade que já apareceu em nosso estudo sobre campos conservativos. O Teorema de Green tem uma idéia essencial e alguns detalhes técnicos. Vamos tentar tratá-los, mas enfatizando o essencial.

10.1 Curvas Simples Fechadas e Integral de Circulação

Uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é dita *fechada* se $\gamma(a) = \gamma(b)$; é dita *simples* se, para todo $t_1, t_2 \in (a,b)$, $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, ou seja, com a possível exceção das extremidades, uma curva simples não tem auto-intersecção.

É um resultado intuitivo (mas não óbvio) que toda curva simples fechada no plano é a fronteira de uma região. Algumas vezes essa região é chamada "o interior da curva γ," mas uma nomenclatura mais precisa é "a região limitada por γ." Faça alguns desenhos para se convencer.

Por convenção, uma curva simples fechada será dita *positivamente orientada* se for percorrida no sentido anti-horário. Tal convenção é muito simples de adotar para exemplos simples, como uma circunferência, mas uma curva simples fechada pode não ser tão simples assim. Mas sempre é possível parametrizá-la de modo que "a volta" que é feita em torno de cada ponto do interior de γ é percorrida no sentido anti-horário.

Como nossa preocupação é calcular integrais ao longo destas curvas, precisaremos de curvas diferenciáveis (para podermos calcular seu vetor velocidade). Mas permitimos que em alguns pontos este vetor esteja duplamente definido (pois estes exemplos aparecem comumente, como é o caso dos polígonos). Uma curva $\gamma(a,b) \to \mathbb{R}^n$ é *diferenciável por pedaços*, ou ainda *seccionalmente diferenciável* se o intervalo $[a,b]$ pode ser particionado em subintervalos I_i tais que a restrição de γ a cada I_i é diferenciável.

Se γ é uma curva simples fechada, seccionalmente diferenciável, e $\vec{F}$ é um campo vetorial definido ao longo de γ, podemos calcular sua integral de linha $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Esta integral ganha o nome de *circulação do campo $\vec{F}$ na curva γ* (você vê uma razão clara para este nome?) e por vezes ganha a notação especial

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

10.2 Circulação Infinitesimal

Vamos agora considerar um caso especial, que é a essência do Teorema de Green. Para isso considere $\vec{F}$ um campo diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e a curva simples fechada γ será uma parametrização do retângulo com vértices (x, y), $(x + \Delta x, y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ e $(x, y + \Delta y)$, percorridos nesta ordem (faça o desenho). Vamos calcular a circulação de $\vec{F}$ em γ, considerando que Δx e Δy são pequenos[1]. Para isso, notamos que γ é a união de quatro segmentos de reta, que chamaremos γ_1, γ_2, γ_3 e γ_4. Das propriedades de integração, segue que

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{10.1}$$

Para calcular a primeira, usamos a parametrição

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x + t\Delta x, y) \end{aligned}$$

e assim $\gamma_1' = (1, 0)\,\Delta x$ e $\vec{T} = (1, 0)$. Considerando então que Δx é pequeno e, portanto, $\Delta x^2 \ll \Delta x$, teremos

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}\,(x + t\Delta x, y) \cdot (1, 0)\,\Delta x\ dt \approx F_x\,(x, y)\,\Delta x. \tag{10.2a}$$

A mesma idéia será usada para calcular $\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Agora parametrizamos

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x + \Delta x, y + t\Delta y)\,, \end{aligned}$$

[1] Pequenos quando comparados ŕs dimensões típicas de variações de $\vec{F}$.

com o que $\gamma_2' = (0,1)$ e $\vec{T} = (0,1)\,\Delta y$. Com as mesmas aproximações, teremos

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}\,(x+\Delta x, y+t\Delta y) \cdot (0,1)\,\Delta y\; dt \approx F_y\,(x+\Delta x, y)\,\Delta y. \tag{10.2b}$$

Passando agora ao terceiro segmento,

$$\begin{aligned} \gamma_3 : [0,1] &\;\rightarrow\; \mathbb{R}^2 \\ t &\;\mapsto\; (x+(1-t)\Delta x, y+\Delta y)\,, \end{aligned}$$

com o que $\gamma_3' = -\,(1,0)$ e $\vec{T} = -\,(1,0)\,\Delta x$. Seguindo o mesmo cálculo anterior,

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}\,(x+(1-t)\Delta x, y+\Delta y) \cdot \{-\,(0,1)\,\Delta y\}\; dt \approx -F_x\,(x, y+\Delta y)\,\Delta x. \tag{10.2c}$$

Por fim, fechamos γ com

$$\begin{aligned} \gamma_4 : [0,1] &\;\rightarrow\; \mathbb{R}^2 \\ t &\;\mapsto\; (x, y+(1-t)\Delta y)\,, \end{aligned}$$

com o que $\gamma_4' = -\,(0,1)$ e $\vec{T} = -\,(0,1)\,\Delta y$, e segue

$$\int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}\,(x, y+(1-t)\Delta y) \cdot \{-\,(0,1)\,\Delta y\}\; dt \approx -F_y\,(x,y)\,\Delta y. \tag{10.2d}$$

Agora voltamos í expressão (10.1), onde usamos as relações (10.2) para obter

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} &\approx \{F_x\,(x,y) - F_x\,(x+\Delta x, y)\}\,\Delta x + \{F_y\,(x+\Delta x, y) - F_y\,(x,y)\}\,\Delta y \\ &\approx \left(-\frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\Delta A, \end{aligned} \tag{10.3}$$

onde na segunda passagem foi usada a idéia de derivada como aproximação linear e que a área deste pequeno retângulo limitado por γ é $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

A essência do Teorema de Green está no resultado (10.3). Lembremos que esta conta foi feita para calcular a circulação infinitesimal do campo $\vec{F}$

em um pequeno retângulo. O uso do retângulo foi apenas para simplificar o cálculo. Se você usar uma pequena circunferência, um pequeno triângulo ou qualquer outra curva simples fechada que determina uma região *simplesmente conexa*[2], o resultado será o mesmo: a circulação infinitesimal corresponde ao valor do termo entre parênteses vezes a área (infinitesimal) da região. Encontramos assim uma interpretação natural para o termo entre parênteses: ele é aproximado dividindo a circulação infinitesimal em uma curva como esta, pela írea da região que ela delimita. Naturalmente, este valor se torna exato quando fazemos o limite onde a írea da região vai para zero. Assim, identificamos o termo

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

como uma noção de derivada de $\vec{F}$ que traz a informação sobre a circulação infinitesimal, ou seja, sobre a rotação do campo em torno daquele ponto específico. Em particular, a condição local obtida na aula passada para que um campo fosse conservativo era que sua circulação infinitesimal se anulasse em todos os pontos.

10.3 Regiões e suas Fronteiras

Já vimos que uma curva simples fechada determina uma região no plano. Mas agora queremos inverter essa perspectiva. Uma região “bem comportada[3]” terá como fronteira a união de várias curvas simples fechadas.

Precisaremos definir uma noção de orientação para estas curvas. Esta definição é bastante natural se pensarmos da seguinte maneira: seja R a região e faça uma partição dela. As curvas que são fronteira dos elementos da partição podem ser de dois tipos: ou elas são fronteira de dois conjuntos da partição, ou só de um. Aquelas que são fronteira de dois conjuntos são, de certa forma, “internas” í região, enquanto aquelas que são fronteira só de um conjunto da partição são também parte da fronteira da região. Queremos que as curvas “internas” sejam percorridas cada vez em um sentido diferente, para que as suas contribuições se cancelem.

Podemos fazer uma partição da região R usando apenas regiões simplesmente conexas cujas fronteiras são curvas simples fechadas. Cada curva

[2]Sem furos.

[3]Acredite, existem regiões mal comportadas, mas essas não têm interesse no curso de cálculo.

destas deverá ser percorrida no sentido anti-horário, como já foi convencionado. Chegamos então a uma convenção de orientação que pode ser assim enunciada: se considerarmos o plano xy como o plano $z = 0$ de um $\mathbb{R}^3$ cartesiano e imaginarmos que cada curva γ da fronteira é percorrida por alguém que caminha "de cabeça para cima" neste $\mathbb{R}^3$, a orientação desta curva é induzida pela região R se a região estiver sempre ŕ esquera de quem caminha. Para entender tal convenção, comece por uma região simplesmente conexa, e depois pense em regiões "com furos."

Assim, denotaremos por ∂R a fronteira da região R, já subentendida esta convenção de orientação.

10.4 O Teorema de Green

Agora podemos enunciar o principal resultado desta aula:

> Teorema de Green: Sejam R uma região bem comportada do plano, ∂R sua fronteira, com a convenção de orientação já discutida, e $\vec{F} : R \to \mathbb{R}^2$ um campo diferenciável, vale a igualdade
>
> $$\int\int_R \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \, dA = \int_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \qquad (10.4)$$

Por um lado, este teorema deve ser comparado ao Teorema Fundamental do Cálculo, por envolver de um lado a integral de uma derivada e do outro um "termo de fronteira." Aqui, a derivada traz a noção de rotação local do campo e a integral na região toda se trata de uma integral dupla. Já o termo de fronteira se trata de uma integral de linha, na fronteira da região. Vale notar que em um termo estamos calculando a rotação infinitesinal e somando por todos os pedacinhos, enquanto no outro estamos calculando a circulação diretamente na fronteira. Cabe ressaltar que a notação $\displaystyle\int_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é muito conveniente para enunciar e usar o teorema, mas que deve sempre ser lembrado que, em geral, ela pode envolver vários termos: a soma sobre as várias curvas simples fechadas que constituem a fronteira de R.

10.4.1 Uma idéia de demonstração

As idéias essenciais para a demonstração já foram apresentadas, mas vamos recordá-las aqui.

O primeiro passo é fazer uma partição da região R usando apenas regiões simplesmente conexas. Para fixarmos, considere uma partição por retângulos. Assim, o primeiro termo poderá ser calculado fazendo a integral em cada retângulo e somando todos eles.

Para cada retângulo da partição vale o cálculo feito na secção 10.2, e assim podemos trocar a integral dulpla em cada retângulo por integrais de circulação.

Por fim, vem a discussão sobre a convenção de orientação: os lados de retângulos da partição se dividem em dois tipos: aqueles que só pertencem a um retângulo da partição e os que pertencem a dois. Aqueles que pertencem a dois serão percorridos cada vez com uma orientação, o que cancela sua contribuição.

Restam, portanto, os lados de retângulo que correspondem a ∂R, e é isso que está denotado no segundo termo.

10.4.2 Aplicações

Como todo resultado em matemática que garante a igualdade entre duas expressões, sua utilização passa por trocar uma mais difícil por uma mais fácil. Qual será a mais difícil e qual será a mais fácil pode variar de caso a caso.

Uma aplicação interessante é trocar integrais de linha que pareçam muito complicadas por outras mais simples, e eventualmente incluir um termo que venha da integral dupla. Por exemplo, suponha que queremos calcular a integral de circulação do campo $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, no gráfico polar $r = 5 + \text{ sen }(8\theta)$, percorrido com orientação positiva (faça uma figura que represente esta curva).

Um cálculo direto é possível, porém muito chato. Na aula passada já vimos que a circulação deste campo na circunferência unitária percorrida com orientação positiva é 2π e que a rotação infinitesimal desta campo é zero em todo seu domínio. Podemos então considerar a região do plano "fora" da circunferência unitária e "dentro" do gráfico polar apresentado. A fronteira desta região consiste de duas curvas fechadas, com o gráfico polar em questão sendo percorrido no sentido positivo e a circunferência no sentido contrário. Denotando por γ este gráfico polar e por C a circunferência, ambas com suas orientações positivas, o que o Teorema de Green nos diz aqui é que

$$0 = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

com o sinal de menos vindo da orientação. Com isso obtemos

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

Outra aplicação interessante e menos imediata é o cálculo da áreas de regiões determinadas por curvas simples fechadas. Para isso basta lembrarmos que $\int\int_{R} dA = A(R)$ e que podemos obter vários campos $\vec{F}$ tais que

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 1.$$

Exemplos simples são

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= (y, 0), \\ \vec{F}_2 &= (0, -x), \\ \vec{F}_3 &= \frac{1}{2}(y, -x) \end{aligned}$$

Com isso, se γ é uma curva simples fechada, é verdade que as fórmulas

$$\int_{\gamma} y\ dx, \quad \int_{\gamma} -x\ dy, \quad \frac{1}{2}\int_{\gamma} y\ dx - x\ dy$$

são todas expressões para a área da região delimitada pela curva γ. Como forma de verificar, você pode usá-las para calcular a área de um triângulo, ou de uma elipse, por exemplo.