Cálculo III

Departamento de Matemática - ICEx - UFMG
Marcelo Terra Cunha

Campos Vetoriais e Integrais de Linha

Um segundo objeto de interesse do Cálculo Vetorial são os *campos de vetores*, que surgem principalmente na hidrodinâmica e no eletromagnetismo. Os principais teoremas do cálculo vetorial envolvem campos, alguma noção de derivada e algum tipo de integração, podendo ser considerados irmãos do *Teorema Fundamental do Cálculo*. Na aula de hoje já veremos um desses casos.

9.1 Campos Vetoriais

Se $U \subset \mathbb{R}^m$, uma função $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^n$ é dita um *campo vetorial*. Na maioria dos exemplos, $m = n$. A intuição física pode ser criada pensando em um fluxo. Considere, por exemplo, um rio que corre suavemente, sem muitas variações temporais (o tempo também pode ser considerado como uma variável do domínio, mas deixe isso para um segundo pensamento): para cada ponto deste rio, podemos considerar um vetor velocidade para a partícula que ocupa aquele ponto. Isso vai definir um campo de vetores ($n = 3$, se considerarmos que o rio tem profundidade e que a água pode subir e descer), definido na região U que corresponde ao rio em questão.

Outros exemplos também podem ser considerados. O campo elétrico gerado por uma distribuição de cargas; o campo gravitacional de uma distribuição de matéria (em física newtoniana); o campo de velocidades para partículas atmosféricas (essencial para a meteorologia, e análogo ao exemplo do rio, no parágrafo anterior).

Há um exemplo de outra coisa, que também deve ser entendido: se pensarmos na temperatura atmosférica como função da posição, não teremos um campo vetorial, pelo simples fato de a temperatura não ser um vetor. Em alguns contextos, é comum dizer que este é um *campo escalar*. Do mesmo modo, se pensarmos no potencial elétrico gerado por uma distribuição de cargas, ou no potencial gravitacional de uma distribuição de matéria, teremos exemplos de campos escalares. E qual a relação deles com os campos vetoriais?

Assim como fizemos com as curvas, campos vetoriais podem ser decompostos em coordenadas (usamos $n = 3$, mas você pode pensar em n arbitrário):

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\ \vec{i} + F_y(x, y, z)\ \vec{j} + F_z(x, y, z)\ \vec{k}.$$

O campo $\vec{F}$ será *contínuo* (em $p = (x_o, y_o, z_o)$) se, e só se, seus componentes forem contínuos (em p). Do mesmo modo, o campo $\vec{F}$ é *diferenciável* (em p) se, e só se, seus componentes são funções diferenciáveis (em p).

Você se lembra que, para uma função $f : U \to \mathbb{R}$, diferenciável, você podia definir o *vetor gradiente* desta função (em cada ponto):

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Aí está a relação entre os campos escalares que citamos acima e os campos vetoriais: dado um campo escalar diferenciável, seu gradiente define um campo vetorial. Em particular[1], o gradiente do potencial elétrico determina o campo elétrico, o gradiente do potencial gravitacional determinar o campo gravitacional, e, em um regime estacionário[2], o gradiente do campo de temperaturas determina o campo de velocidades.

Todos esses exemplos, e a lembrança que o caso interessante mais simples já trata de funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, deve deixar claro porque, normalmente, a representação gráfica de um campo de vetores se faz colocando em cada ponto do domínio um vetor que representa o campo naquele ponto. Claro que tal representação é sempre feita por uma amostragem, sendo impossível representar o campo em todos os pontos. Claro, também, que se essa amostragem não for significativa, muitos erros de interpretação podem acontecer. Para que fique claro, pense no significado do campo $(\cos(\pi x)\,,\ \text{sen}\,(\pi y))$ e faça uma representação gráfica usando apenas pontos com coordenadas inteiras.

[1]Lembre que em física se inclui o sinal de menos na definição, apenas para que o campo em questão aponte "do maior para o menor". É apenas uma convenção, bastante natural, e que não deve gerar confusão.

[2]Em problemas meteorológicos de verdade nunca se está em um regime estacionário, assim outros efeitos entram em jogo e este gradiente de temperatura "apenas" influencia fortemente na definição do campo de velocidades, mas não de maneira exclusiva. Mas não custa lembrar que também o potencial elétrico só determina o campo elétrico em regime estacionário; do contrário, o "potencial vetor" $\vec{A}$ também desempenha um papel. Veja as equações de Maxwell em algum livro, ou na camisa de algum colega.

9.1.1 Campos Conservativos

O importante exemplo dos campos gradientes já foi apresentado acima. Por enquanto, queremos apenas incluir a informação que eles são chamados *campo conservativos*. Assim, um campo $\vec{F}$ é conservativo quando existe uma função ϕ (chamada um *potencial* para este campo)[3] tal que

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi.$$

Para que o significado desta definição fique mais claro, precisamos passar às integrais de linha.

9.2 Integral de Linha

Como já dissemos, há vários contextos para calcular integrais de linha. Já apresentamos alguns deles, como o cálculo do comprimento do arco, ou da integral de uma função escalar definida ao longo da curva. Agora temos uma situação diferente, com um campo de vetores definido ao longo da curva. Portanto, devemos agora considerar γ uma curva em U, a região onde está definido o campo ($\gamma : [a,b] \to U$). Poderíamos pensar em algumas idéias do que fazer com um campo e uma curva, mas há um caso com interpretação natural a partir dos exemplos estudados. Se consideramos agora um campo de forças (ou seja, uma carga de prova no campo elétrico, ou uma massa sujeita ao campo gravitacional...), é natural calcularmos o trabalho deste campo de força quando a partícula percorre a trajetória parametrizada por γ. Assim, se para um deslocamento retilíneo e uma força constante, o trabalho era dado por $\vec{F}\cdot\vec{\Delta s}$, agora usamos a noção usual de "quebrar em pedacinhos" (lembre das somas de Riemann, sempre), calcular para cada pedacinho e somar. Com essa intuição, vem a definição da integral de linha do campo $\vec{F}$ ao longo da curva γ:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\ d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\left(\gamma\left(t\right)\right)\cdot\gamma'\left(t\right)\ dt. \tag{9.1}$$

Mais uma vez, a definição foi feita fazendo uso de uma parametrização específica da curva. Mas pode-se mostrar que a integral de linha definida em (9.1) depende apenas do campo, do traço da curva e de sua orientação (*i.e.*

[3]Reveja a nota de rodapé 1.

se percorrida de $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ ou vice-versa). Com efeito, usando o mesmo ds do comprimento de arco, temos que

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{T}\ ds,$$

e como na aula anterior já mostramos que a integral de linha de uma função escalar não depende da parametrização, segue a independência afirmada. Também deve ser claro porque lá a integral não dependia da orientação e aqui depende: o vetor $\vec{T}$ depende desta orientação. Caso percorramos a curva no sentido contrário, obteremos o resultado com o sinal negativo, da mesma forma que as integrais definidas do cálculo I, quando invertíamos os limites de integração.

Por outro lado, deve ficar claro o significado na (9.1) do novo *elemento de integração* introduzido: $d\vec{r} = \vec{T}\ ds$, ou seja, um *elemento de linha vetorial*, que naturalmente aponta na direção tangente à curva orientada, e tem seu comprimento dado pelo comprimento de arco, já discutido.

Agora passemos ao importante caso dos campos conservativos, com $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_\gamma \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{\nabla}\phi\left(\gamma(t)\right)\cdot\gamma'(t)\ dt\\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\phi\left(\gamma(t)\right)\ dt = \phi\left(\gamma(b)\right) - \phi\left(\gamma(a)\right),\end{aligned}$$

onde só foi usada a regra da cadeia para funções de várias variáveis, estudada no cálculo II. Esta conta é de simples interpretação e de profundas conseqüências: a interpretação é que ao calcular a integral de linha de um campo gradiente, estamos somando pequenas variações de um campo que é obtido como variação de uma função potencial. Assim, o que fazemos é obter a variação total desta função. A conseqüência é que a integral de linha de um campo conservativo não depende do caminho escolhido entre dois pontos! Apenas dos pontos inicial e final. Daí a noção de conservação: o trabalho realizado está sendo passado a uma energia potencial, que, caso a partícula volte à posição de onde começou[4], será toda devolvida à partícula. Em particular, se o ponto inicial e final coincidirem, a integral de um campo conservativo deve se anular.

[4] Independente do caminho realizado.

9.3 Como saber se um campo é conservativo

Claramente os campos conservativos são interessantes. Mas dado $\vec{F}$, como saber se existe um potencial para ele? Em outras palavras, como saber se ele é conservativo?

O interessante da resposta a esta questão é que ela involve dois aspectos: um *local* e um *global*. Em matemática, uma questão é local quando depende apenas da vizinhança de um ponto, e um aspecto é global quando depende de todo o domínio. Em particular, derivadas são propriedades locais, enquanto integrais são globais.

9.3.1 Restrição ao plano

Nesta discussão vamos considerar $U \subset \mathbb{R}^2$ e $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^2$. A mesma questão será retomada na quarta parte do curso para $n = 3$.

Vale notar que se existe um potencial ϕ para $\vec{F}$ e este é uma função bem comportada, teremos o teorema de Schwartz a nos dizer que

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\phi = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\phi.$$

Mas se

$$\vec{F} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right),$$

teremos

$$\frac{\partial}{\partial x}F_y = \frac{\partial}{\partial y}F_x. \tag{9.2}$$

Portanto, concluímos que se $\vec{F}$ é um campo conservativo em uma região do plano, com um potencial bem comportado[5], necessariamente vale a equação (9.2). Mas será que todo campo com esta propriedade é conservativo? Aí entra o aspecto global! A condição obtida aqui, por só envolver derivadas, é uma condição local. Ela nos diz, então, que em uma pequena vizinhança de cada ponto onde está definido o plano, poderíamos sim escrever uma função potencial para ele. A pergunta que resiste é se podemos escrever uma única função potencial para toda a região U onde o campo está definido. De outro modo, se podemos "colar" os potencial definidos localmente, de modo a obter um potencial global.

[5] Segundas derivadas contínuas.

O contra-exemplo clássico é o campo

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right), \tag{9.3}$$

onde temos

$$\frac{\partial}{\partial x}F_y = \frac{1}{x^2+y^2} - x\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F_x = \frac{-1}{x^2+y^2} + y\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

e, portanto, a eq. (9.2) é obedecida. Porém, se escolhemos o círculo unitário como curva para fazer a integral, com a paramtrização dada por

$$c(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t) \quad t \in [0, 2\pi],$$

teremos

$$\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t)\ dt = 2\pi.$$

Por um lado, o resultado da integração deve ser simples: o campo em questão coincide com o vetor tangente unitário da circunferência[6], portanto a integral coincide com o comprimento do arco. Por outro, temos o interessante resultado que, embora o campo $\vec{F}$ obedeça à eq.(9.2), sua integral de linha em um caminho fechado não é nula, e, portanto, não temos um campo conservativo e não teremos um potencial globalmente definido. De fato, se trabalhássemos em algumas regiões menores do que o domínio deste campo (o plano menos a origem), poderíamos definir um potencial, e portanto restrições deste campo poderiam ser consideradas conservativas.

é interessante notar que todo o problema que aqui surge vem do fato do caminho escolhido dar "uma volta" em torno do ponto onde o campo não está definido. Invertendo o ponto de vista, vemos que a integral de linha aqui utilizada "percebeu" que deu uma volta em torno de um ponto específico, mesmo sem ter passado por ele. Essa é uma relação entre os domínios do

[6] Alguém mais atento já pode ter percebido que o campo da eq.(9.3) é uma versão para o plano do campo magnético gerado por uma corrente uniforme concentrada no eixo z. Isso não é mera coincidência.

plano e os possíveis campos diferenciáveis definidos nestas regiões (e ainda, os possíveis valores de integrais de linhas definidas em caminhos fechados nestes domínios), um ramo de estudo da matemática chamado *topologia diferencial*, onde há esta coexistência entre aspectos globais (que tipicamente interessam à topologia) e aspectos locais (derivadas).