GABARITO P2 2004.2 - MAT1154

1-A- Solução homogênea:

$$y_h'' = y_h$$

$$\lambda^2 = \lambda$$

$$\lambda = 0 \quad ou \quad \lambda = 1$$

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2$$

Solução particular:

É natural conjecturar que há uma solução do tipo:

$$y_p(x) = ax + b$$

Substituindo a função e suas respectivas derivadas na equação diferencial, temos:

$$0 - (ax + b) = x$$

Por igualdade de polinômios, temos que a = -1 e b =0. Logo, a solução geral, dada pela soma da solução homogênea com a particular, é:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 - x$$

1-B- A equação de diferenças pode ser associada ao seguinte polinômio:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

Cuja solução é $\lambda = 2$

Sendo assim, temos que:

$$y_n = C_1 2^n + C_2 n 2^{n-1}$$

Substituindo as condições iniciais na solução geral encontrada, temos que:

$$C_1 = 1 \qquad e \qquad C_2 = -1$$

Logo:

$$y_n = 2^n - n2^{n-1}$$

2-A-

$$ln(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1.0 + a_2.0^2 + a_3.0^3 + a_4.0^4 + ... = 0$$

$$a_0 = 0$$

Fazendo a derivada polinomial de f, temos:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ...$$

Derivando a mesma f, porém através da regra da cadeia envolvendo o logaritmo natural, temos:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x-1}$$

Igualando ambas as derivadas em x=0:

$$a_1 = -1$$

O processo citado acima é repetido analogamente, então representaremos somente mais uma vez:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = 2a_2 + 3.2a_3x + 4.3a_4x^2 + 5.4a_5x^3 + \ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(0)}{\mathrm{d}x^2} = -1 = 2a_2$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}$$

Executadas corretamente as derivações e igualdades subsequentes, encontraremos os valores:

$$a_3 = -\tfrac{1}{3} \quad a_4 = -\tfrac{1}{4} \quad a_5 = -\tfrac{1}{5}$$

2-B- É trivial, pela recorrência facilmente encontrada no item anterior, que:

$$a_k = -\frac{1}{k}$$

Com exceção de k =0.

3-A- Supondo que

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$$

Temos:

$$4y(x) = 4a_0 + 4a_1 x + 4a_2 x^2 + 4a_3 x^3 + 4a_4 x^4 + 4a_5 x^5 + \ldots$$

$$2xy' = 2.1a_1 x + 2.2a_2 x^2 + 2.3a_3 x^3 + 2.4a_4 x^4 + \ldots$$

$$y''(x) = 2a_2 + 3.2a_3 x + 4.3a_4 x^2 + 5.4a_5 x^3 + 6.5a_6 x^4 + \ldots$$

Somando as parcelas de expoente de mesmo grau em x, temos:

$$0 = (2a_2 - 4a_0) + (3.2a_3 - 6a_1)x + (4.3a_4 - 8a_2)x^2 + \ldots$$

É trivial identificar uma relação de recorrência:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n+4)a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+1}$$

3-B- Vemos, pela equação de diferenças encontrada (relação de recorrência), que todo termo depende do termo duas unidades antes do mesmo, de forma que termos de ordem par depende apenas de termos de ordem par e termos de ordem ímpar dependem apenas de termos de ordem ímpar.
A recorrência encontrada também nos permite verificar que todos os termos pares irão depender de a0, enquanto todos os termos ímpares dependerão de a1. Os valores de ambos os coeficientes estão dados pelas condições iniciais do problema. Pela condição inicial, sendo a0 = 0,
TODOS OS TERMOS PARES SÃO ZERADOS.
Vamos aos termos ímpares:

Pela condição inicial $a_1 = 1$

Agora utilizaremos a relação de recorrência encontrada:

$$a_3 = \frac{2a_1}{2} = 1$$

$$a_5 = \frac{2a_3}{4} = \frac{2.2a_1}{2.4} = \frac{1}{2}$$

$$a_7 = \frac{2a_5}{6} = \frac{2^3a_1}{2.4.6} = \frac{2^3a_1}{2^3.3!} = \frac{1}{3!}$$

$$a_9 = \frac{2a_7}{8} = \frac{2^4a_1}{2.4.6.8} = \frac{2^4a_1}{2^4.4!} = \frac{1}{4!}$$

3-C- Nota-se, do item anterior, que podemos verificar a seguinte lei:

Para k par:

$$a_k = 0$$

Para k ímpar:

$$a_k = \frac{1}{\left(\frac{k-1}{2}\right)!}$$

3-D- A função é:

$$y(x) = x.e^{x^2}$$

A demonstração se encontra ao final deste documento.

4-A- A equação diferencial pode ser associada ao seguinte polinômio:

$$\lambda^2 + b\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}$$

Logo, a solução da equação é dada por:

$$f_b(t) = C_1 e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4}}{2}t} + C_2 e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4}}{2}t}$$

Aplicando as condições iniciais:

$$f_b(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$Sejam \quad \lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4}}{2}$$

$$f_b'(t) = \lambda_1.C_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2.C_1 e^{\lambda_2 t}$$

$$f_b'(0) = C_1 \left(\lambda_1 - \lambda_2\right) = 1$$

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4}}$$

$$f_b(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\sqrt{b^2 - 4}}$$

4-B- $$f_b(t) = 0 \Rightarrow e^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

$$-b + \sqrt{b^2 - 4} = -b - \sqrt{b^2 - 4}$$

$$\sqrt{b^2 - 4} = -\sqrt{b^2 - 4}$$

$$\sqrt{b^2 - 4} = 0$$

$$b = \pm 2 \quad (ABSURDO)$$

Se b possuir os valores encontrados, a função possuirá um denominador valendo 0, o que constitui um absurdo. Logo, não há valores de b para os quais t > 0 e fb(t) = 0.

4-C- Provamos no item anterior que não existe t real positivo que implique em fb(t) = 0, logo não há o que desenvolver neste item.

DEMONSTRAÇÃO DO ITEM 3-D:

$$y(x) = x + x^3 + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \frac{x^9}{4!} + \frac{x^{11}}{5!} + \ldots$$

$$Sabemos \quad que \quad e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$Logo, \quad e^{x^2} = 1 + x^2 + \tfrac{x^4}{2!} + \tfrac{x^6}{3!} + \tfrac{x^8}{4!} + \tfrac{x^{10}}{5!} + \ldots$$

$$Se \quad multiplicarmos \quad e^{x^2} \quad por \quad x, \quad temos:$$

$$x.e^{x^2} = x + x^3 + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \frac{x^9}{4!} + \frac{x^{11}}{5!} + \ldots$$

$$y(x) = x.e^{x^2}$$