Cálculo III

Departamento de Matemática - ICEx - UFMG

Marcelo Terra Cunha

Curvas no Plano e no Espaço*

*Esta segunda versão corresponde ao que efetivamente foi apresentado na aula de 22/09.

É justo dizer que os cursos de Cálculo são cursos de funções reais de variáveis reais. No Cálculo I foram estudadas as funções reais de uma variável real, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. No fim do cálculo II você estudou o cálculo diferencial de funções reais de várias variáveis, ou seja, funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com os importantes conceitos de *derivadas parciais* e *gradiente*. Já no cálculo III, foi a vez do cálculo integral destas mesmas funções, com o conceito de *integrais múltiplas* e a fundamental noção de *mudança de variáveis*. Para completar nosso estudo, ao nível dos cursos de cálculo, resta permitir que o contradomínio seja $\mathbb{R}^n$. É isso que faremos daqui por diante[1], com o estudo das *curvas* e dos *campos vetoriais*.

7.1 Conceitos Básicos

Seja $I = [a, b]$ um intervalo. Uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ será chamada uma *curva* (como usual neste curso, consideraremos em detalhes apenas os casos $n = 2, 3$, com o caso geral sendo, em muitos aspectos, semelhante). Uma maneira simples de trabalhar com curvas é considerar um sistema de coordenadas escolhido no contra-domínio. Por exemplo, cosidere coordenadas cartesianas. Assim, definir a curva γ é o mesmo que definir suas componentes $(\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z)$. Em temos vetoriais, sendo $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ os vetores unitários ortogonais que servem de base canônica para o $\mathbb{R}^3$ euclidiano, o que estamos fazendo é considerar

$$\gamma(t) = \gamma_x(t)\,\vec{i} + \gamma_y(t)\,\vec{j} + \gamma_z(t)\,\vec{k}.$$

Vale notar que na expressão acima não fizemos questão de explicitar na notação que $\gamma(t)$ é um vetor. Em alguns instantes é melhor fazê-lo, e nestes casos denotaremos $\vec{\gamma}(t)$.

[1]É verdade que já houve uma *avant première* desse estudo, quando definimos as transformações $T : S \to R$ que faziam as mudanças de coordenadas em duas e três variáveis.

Vários fatos e propriedades seguem naturalmente da definição aqui apresentada e da decomposição em coordenadas. Em particular, as noções de limite, continuidade e diferenciabilidade. Em particular, para uma curva γ dada em coordenadas cartesianas, temos

$$\lim_{t\to t_o} \gamma\left(t\right) = \left(\lim_{t\to t_o} \gamma_x\left(t\right), \lim_{t\to t_o} \gamma_y\left(t\right), \lim_{t\to t_o} \gamma_z\left(t\right)\right),$$

com esta expressão trazendo o significado que $\lim_{t\to t_o} \gamma\left(t\right)$ existe se, e somente se, os três limites das funções componentes existirem.

Generalizando as definições anteriores de funções reais de uma variável, seguem que γ é contínua (em t_o) se, e só se, suas componentes forem contínuas (em t_o); e que γ é diferenciável (em t_o) se, e só se, suas componentes forem diferenciáveis (em t_o).

7.1.1 Exemplos e Interpretações

Alguns exemplos simples mas esclarecedores virão a seguir. Voltaremos a eles durante a aula, por isso, vamos fixar a notação:

Circunferência no plano Para $I = [0, 2\pi]$, vamos a um primeiro exemplo, simples, de curva no plano ($n = 2$); seja $R > 0$ constante:

$$\begin{aligned} c : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(R\cos t, R \operatorname{sen} t\right). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Circunferência no espaço Agora com $n = 3$, vemos uma curva muito parecida com a anterior

$$\begin{aligned} C : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \left(R\cos t, R \operatorname{sen} t, 0\right). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Você deve gastar um tempinho entendendo a diferença destes dois exemplos.

Hélice Seja agora $P > 0$ uma outra constante. A curva

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \left(R\cos t, R \operatorname{sen} t, Pt\right) \end{aligned} \tag{7.3}$$

é chamada *hélice*[2].

Cúbica Reversa Outro exemplo com importância intrínseca e histórica é a chamada *cúbica reversa*:

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \left(t, t^2, t^3\right). \end{aligned} \tag{7.4}$$

É chamada reversa por ser uma curva no espaço tridimensional que não pode ser entendida como uma curva plana incluída no espaço (historicamente o primeiro exemplo, envolvendo apenas polinômios - a hélice é outro bom exemplo deste tipo, e, de fato, há muitos exemplos).

Para cada um dos exemplos citados, você deve:

- Verificar que se trata de uma curva contínua;
- Obter a derivada, verificando assim que tratam-se de curvas *diferenciáveis*, e interpretar este resultado.

Com estes exemplos você já deve ter interpretado a derivada de uma curva em um ponto: trata-se de um vetor. Este vetor traz duas informações distintas de uma vez só: uma exclusivamente *geométrica* e outra que merece uma interpretação *cinemática*.

7.1.2 Geometria e Cinemática

É importante distinguir que definimos *curva* como uma função. Como toda função, ela tem um domínio, um contradomínio e uma relação que leva cada ponto do domínio a um no contra-domínio. Coloquialmente, costumamos nos referir a curvas apenas como um conjunto de pontos no plano ou no espaço. Para evitar confusões, sempre que necessário nos referiremos a este conjunto de pontos (a imagem de uma curva, em seu sentido aqui usado) como o *traço da curva* (ou seja, a linha que ela traça, quando é percorrida), e por outro lado, as curvas aqui estudadas (no sentido de funções) serão também referidas como *curvas parametrizadas*.

[2]Talvez você se sinta tentado a chamá-la de espiral, mas matematicamente falando, espirais são curvas planas, como por exemplo $(e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$.

Neste sentido, propriedades geométricas de uma curva são aquelas que dependem exclusivamente de seu traço, enquanto propriedades cinemáticas dependem não apenas do traço, mas da parametrização escolhida[3].

O vetor derivada de uma curva em um ponto, por exemplo, denotado $\gamma'(t)$, traz estas duas informações: sua direção é tangente à curva, uma informação puramente geométrica; seu sentido e intensidade dependem de como a curva é parametrizada. Assim, o vetor $\gamma'(t)$ é chamado *vetor velocidade*, sua magnitude (ou norma) é a *velocidade escalar*[4]. Se a velocidade escalar for diferente de zero, obtemos

$$\vec{T} = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|},$$

o chamado *vetor tangente* à curva. Esta definição do vetor $\vec{T}$ torna natural trabalharmos em uma classe restrita de curvas: são chamadas *curvas regulares* aquelas que, para todo t, possuem vetor velocidade não-nulo. Todos os exemplos já trabalhados até aqui são de curvas regulares. Para um bom exemplo de curva não-regular, considere

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left(t^2, t^3\right),$$

que pode ser entendida como a projeção da cúbica reversa no plano cartesiano yz, e tem uma singularidade na origem chamada *cúspide*.

7.1.3 Reparametrizações

Se temos uma curva (regular) dada por $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, e uma mudança de variável (bijeção diferenciável) $g : J \to I$, a composição $\gamma \circ g : J \to \mathbb{R}^n$ é uma nova curva (regular) com o mesmo traço que a anterior. Esta nova curva é chamada uma *reparametrização* da primeira.

Para alguns exemplos simples de reparametrizações, considere o círculo do exemplo (7.1) e interprete as seguintes reparametrizações (e encontre os intervalos adequados):

$$c_1(t) = \left(R\cos(2\pi t), R \text{ sen } (2\pi t)\right), \tag{7.5a}$$

$$c_2(t) = \left(R\cos(2\pi - t), R \text{ sen } (2\pi - t)\right), \tag{7.5b}$$

$$c_3(t) = \left(R\cos\left(\frac{t}{R}\right), R \text{ sen } \left(\frac{t}{R}\right)\right); \tag{7.5c}$$

[3]Naturalmente considera-se t como o tempo e a curva como trajetória de algum ponto material nesta interpretação cinemática.

[4]Em língua inglesa, *speed*, e alguns livros em português buscam a tradução *rapidez*.

a (7.5a) apenas percorre a mesma circunferência “mais rápido”, a (7.5b) inverte o sentido em que a circunferência é percorrida (dizemos que ela *muda a orientação* da curva), enquanto a (7.5c) tem uma propriedade muito importante: sua velocidade escalar é constante e igual a 1 (não há uma preocupação com unidades nesta discussão, note que calculamos $\operatorname{sen} t$, por exemplo, uma indicação que nossos parâmetros são adimensionais), ou seja, os vetores tangente e velocidade coincidem em todos os pontos. Este é um exemplo de uma propriedade muito importante, que explicitaremos a seguir.

Entre todas as reparametrizações de uma curva regular que preservam a orientação, uma tem destaque especial: é a chamada *parametrização por comprimento de arco*: nela, $\|\gamma'(s)\| = 1, \forall s$. É convencional denotar por s o “parâmetro de arco”, ou seja, o parâmetro desta parametrização específica que acabamos de definir. E devemos agora interpretar este significado: se percorrermos uma curva dando passos de tamanho 1 a cada unidade do parâmetro, quantos passos deveremos dar para percorrer uma curva de comprimento L?

7.1.4 O comprimento do arco

Já definimos a parametrização por comprimento de arco, vimos um exemplo dela e a interpretamos. Mas, normalmente, as curvas não são necessariamente parametrizadas por comprimento de arco. Neste caso, como podemos obter o comprimento de uma curva parametrizada?

A interpretação cinemática aqui ajuda muito. Pensando o parâmetro como um tempo, trata-se de calcular a “distância efetivamente percorrida ao longo de uma trajetória”. Para isso devemos integrar a velocidade escalar ao longo da curva. Assim, se

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma(t),$$

o comprimento desta curva será dado por

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \; dt. \tag{7.6a}$$

É sempre interessante lembrar que nesta integral uma informaçao geométrica (ou seja, independente de parametrização), o comprimento da curva, foi obtida a partir de uma parametrização. Para um olhar mais atento, aqui está nossa conhecida fórmula de mudança de coordenadas: $\|\gamma'(t)\|$ faz o papel do jacobiano da transformação, traduzindo quanto mede no espaço onde é traçada a curva um comprimento padrão percorrido pelo parâmetro t da curva. Assim, a fórmula (7.6a) pode ser interpretada como

$$L = \int_\gamma ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \; dt, \tag{7.6b}$$

onde a expressão intermediária representa uma *integral de linha*, da função constante igual a 1, calculada ao longo da curva γ. Voltaremos muito a este tema nas próximas aulas.

As expressões (7.6) nos dão uma receita para obter a reparametrização por comprimento de arco. Podemos obter

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \; d\tau. \tag{7.7}$$

Obtida $s(t)$, como para curvas regulares esta será uma função crescente, basta inverter a relação para obter $t(s)$ e assim escrever $\gamma(s) = \gamma(t(s))$. Embora teoricamente simples, em vários exemplos a integral a ser resolvida na expressão (7.7) se mostra muito difícil.