Cálculo III

Departamento de Matemática - ICEx - UFMG
Marcelo Terra Cunha

Fluxo de Campos Vetoriais: Teorema da Divergência

Na aula anterior introduzimos o conceito de superfície paramétrica e chegamos a integrar funções f definidas em uma superfície, incluindo o importante exemplo do cálculo da área da superfície. Agora vamos trabalhar com campos vetoriais, definir o importante conceito de *fluxo* de um campo através de uma superfície e deduzir o *teorema da divergência* que envolve o cálculo do fluxo de um campo através da fronteira de uma região em $\mathbb{R}^3$.

12.1 Recapitulação

Um superfície paramétrica é dada por:

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}: & D & \to \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \end{array}$$

onde $D \subset \mathbb{R}^2$.

As curvas

$$\vec{r}(u, v_o) = (x(u, v_o), y(u, v_o), z(u, v_o))$$

e

$$\vec{r}(u_o, v) = (x(u_o, v), y(u_o, v), z(u_o, v))$$

jogam um papel importante, seja na visualização das curvas, seja na definição da integral de superfície. A partir de seus vetores velocidade, $\vec{r}_u$ e $\vec{r}_v$, obtemos o vetor normal à superfície

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v.$$

Uma superfície paramétrica é dita regular se, e só se, $\vec{N} \neq 0, \forall (u,v) \in D$. Além da intepretação como vetor normal ao plano tangente à superfície no ponto $\vec{r}(u,v)$, interpretamos sua norma como a razão entre os elementos de área da superfície e dos parâmetros u e v:

$$dA_S = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \; dA_{(u,v)}.$$

Para evitar carregar a notação, é comum denotarmos o *elemento de área da superfície* por dS, assim a expressão acima toma a forma

$$dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \; du\, dv.$$

12.2 A noção de Fluxo

Se tomamos um pequeno pedaço de superfície parametrizada, S, e um campo vetorial, $\vec{F}$, definido nesta superfície[1] a noção mais relevante a se definir é a de *fluxo de $\vec{F}$ através de S*. O caso mais simples é considerar $\vec{F}$ constante e S como um pedaço de plano, com vetor normal unitário $\vec{N}$. Neste caso, tal fluxo será dado por

$$\vec{F} \cdot \vec{N} \; A\,(S)\,,$$

que pode ser interpretado geometricamente de diferentes maneiras: por um lado, $\vec{F} \cdot \vec{N}$ calcula a componente de $\vec{F}$ normal à superfície S, posteriormente multiplicando por $A\,(S)$, ou consideramos que $\cos\theta A\,(S)$ é a área da superfície "vista pelo" campo $\vec{F}$. Estas duas interpretações geomeétricas levam a duas interpretações físicas equivalentes, mas adequadas a problemas diferentes. Na primeira, podemos interpretar S como uma membrana, e $\vec{F}$ como o campo de velocidades de algum fluido: o fluxo vai nos dizer a taxa com que o fluido atravessa esta membrana; no segundo caso, podemos pensar no exemplo de um coletor solar: o campo é o campo eletromagnético irradiado pelo Sol, a superfície 'e a superfície do coletor, com área fixa, e o fluxo vai depender da posição em que é colocado este coletor - quanto mais próxima a normal do coletor estiver da direção de incidência dos raios solares, melhor[2].

12.3 A questão da orientabilidade

Antes de podermos ir mais adiante com o cálculo do fluxo de um campo em uma superfície, temos que reconhecer que, dada uma superfície, temos

[1]Em alguns casos precisamos que ele esteja definido em uma região de $\mathbb{R}^3$ que contenha a superfície.

[2]Claramente, a instalação de coletores solares involve um interessante problema de otimização, já que esta direção de incidência varia ao longo do dia e ao longo do ano. Outra alternativa é trocar este problema de otimização por um problema de engenharia, e instalar as placas coletoras em um objeto articulados que se orientem para o Sol. Vale lembrar que a Natureza já descobriu esta solução há muito tempo, como é o caso do girassol.

duas escolhas possíveis para o vetor normal unitário, e que o sinal do fluxo depende desta escolha. Assim, o fluxo de um campo através de uma superfície depende da orientação dada á superfície.

Quando trabalhamos com superfícies paramétricas, temos, ponto a ponto, uma escolha muito natural de vetor normal unitário:

$$\vec{N}_{\mathrm{u}} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}.$$

Como a parametrização é feita por funções diferenciáveis (portanto contínuas), é certo que o vetor normal unitário também varia continuamente de um ponto a outro.

Mas há uma questão global sobre orientabilidade de superfícies.

Como as parametrizações que trabalhamos podem levar diferentes pares (u_o, v_o) e (u_1, v_1) a um mesmo ponto, podemos tormar uma curva fechada, na superfície, calcular o vetor normal unitário da superfície em cada ponto desta curva, e ainda fazer a pergunta: o vetor normal unitário obtido pelo ponto final da curva coincide com o do ponto inicial?

Esta pergunta não tem uma resposta geral. Depende da superfície e da curva. Existem superfícies para as quais a resposta é afirmativa, independente da curva escolhida. Estas superfícies são ditas *orientáveis* e é com elas que devemos trabalhar no restante de nosso curso. Exemplos de superfícies orientáveis são abundantes: o plano, o cilindro, a esfera, gráficos de funções de duas variáveis...

Também existem superfícies *não-orientáveis* e o exemplo clássico é a *fita de Möbius*.

12.4 Integrais de Superfície para o Fluxo

Restringindo agora nossa atenção a superfícies orientáveis, já sabemos que a escolha de uma parametrização define uma orientação para esta superfície. O que vamos definir então é o fluxo do campo $\vec{F}$ através da superfície orientada S, e para isso podemos escolher qualquer parametrização tal que $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ dê a orientação desejada[3].

[3]Se não der, temos duas opções: troque de parametrização, por exemplo trocando a ordem das variávies u e v; ou calcule o fluxo com a orientação trocada e troque o sinal do resultado.

Não deve ser surpresa que a situação simples discutida na 12.2 serve de base para uma construção tipo somas de Riemann. O que fazemos é dividir a superfície em vários pedacinhos, calcular o fluxo sobre cada pedacinho, com orientações compatíveis, e depois somá-los todos.

O vetor normal unitário (em cada ponto) será dado por

$$\vec{N}_{\mathrm{u}} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|},$$

enquanto a área de um pedacinho de superfície correspondente ao retângulo $[u, u + \Delta u] \times [v, v + \Delta v]$ será dada por

$$A\,(\Delta S) = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\ \Delta u\ \Delta v.$$

Portanto, a contribuição para o fluxo dada por este pedaço será bem aproximada por

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \vec{F}\,(\vec{r}\,(u,v)) \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\ \Delta u\ \Delta v \\ &= \vec{F} \cdot \vec{N}\ \Delta u\ \Delta v. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando os pedacinhos vão a zero (na situação em que este limite existe), chegamos ao fluxo

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{N}_{\mathrm{u}}\ dS = \int_D \vec{F} \cdot \vec{N}\ du\ dv,$$

onde a primeira integral é a definição de integral de superfície para um campo vetorial ($d\vec{S}$ é uma notação para o elemento de área orientado na superfície, significando $\vec{N}_{\mathrm{u}}\ dS$), a segunda é a tradução da primeira em termos de uma integral de superfície para uma função (a componente do campo $\vec{F}$ normal à superfície S) e a terceira é a tradução destes conceitos em termos da parametrização trabalhada.

Cabe lembrar que todas as integrais calculadas nas expressões acima se referem a objetos bidimensionais. Caso considere mais claro, você pode usar as notações

$$\iint_S \text{ e } \iint_D$$

em lugar delas.

Antes de prosseguirmos, calculemos um exemplo importante[4]. Considere o campo[5] $\vec{F}\left(vecr\right) = \frac{k}{r^3}\vec{r}$. Queremos calcular seu fluxo para fora da superfície da esfera de raio a centrada na origem. Se denotamos esta esfera por S_a, queremos calcular

$$\Phi = \int_{S_a} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_a} \vec{F} \cdot \vec{N}_{\mathrm{u}}\ dS.$$

Neste caso, o melhor é usar esta última expressão, visto que

$$\vec{N}_{\mathrm{u}} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Assim,

$$\vec{F} \cdot \vec{N}_{\mathrm{u}} = k\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{k}{r^2}$$

e

$$\Phi = \int_{S_a} \frac{k}{r^2}\ dS = \frac{k}{a^2} A\left(S_a\right) = 4\pi k,$$

independente de a. Ou seja, o fluxo deste campo através de esferas concêntricas é o mesmo. Esta é uma excelente justificativa geométrica para importantes campos de força terem decaimento na forma $\frac{1}{r^2}$. Em particular, este resultado está intimamente ligado à primeira das equações de Maxwell.

12.5 Fluxo para fora de um paralelepípedo infinitesimal

Vamos agora fazer uma conta inspiradora. Vamos calcular o fluxo para fora da superfície do paralelepípedo $[x, x + \Delta x] \times [y, y + \Delta y] \times [z, z + \Delta z]$.

Para isso temos que somar seis contribuições, uma de cada face. Vamos fazer com cuidado o caso das faces paralelas ao plano xy e você deve adaptar o argumento para as outras quatro faces. Consideraremos $\Delta x, \Delta y, \Delta z > 0$.

O fluxo pela face com z fixo pode ser aproximado por

$$-F_z\left(x, y, z\right)\ \Delta x\ \Delta y,$$

[4]Sugiro que você tente reobter esse resultado usando uma parametrização para a esfera S_a, com o que você pode tentar entender cada passo da conta.

[5]Que pode ser pensado como força de Coulomb ou de Newton.

enquanto o fluxo pela face com $z + \Delta z$ será

$$F_z\,(x, y, z + \Delta z)\;\; \Delta x\; \Delta y.$$

Aí entrará novamente a noção de aproximação linear, levando à contribuição somada destas duas faces

$$\frac{\partial F_z}{\partial z}\; \Delta z\; \Delta x\; \Delta y.$$

Ao repetir este argumento para as outras faces você vai concluir que

$$\Phi \approx \left\{ \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right\}\; \Delta x\; \Delta y\; \Delta z.$$

12.6 A Divergência de um campo

O cálculo acima motiva a definição de *divergência* de um campo:

$$\div \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

onde na segunda notação temos o “vetor”

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

o mesmo que foi usado para definir o gradiente e agora atua em um campo vetorial, como se fosse com um produto escalar (daí a notação).

Na secção anterior vimos o significado da divergência de um campo, calculada em um ponto: o quanto o campo diverge daquele ponto. Se interpretarmos o campo como um campo de velocidades de um fluido, os pontos onde a divergência é positiva estarão associados a fontes de fluido, e aqueles com divergência negativa a sumidouros. Já no caso de campos elétricos, a divergência está associada à existência de (densidades de) cargas.

12.7 Teorema da Divergência

Agora podemos concluir esta aula com um dos resultados centrais do cálculo vetorial.

Se considerarmos uma região tridimensional limitada (e bem comportada) R, sua fronteira, ∂R, será uma superfície orientada. Por convenção, orienta-se ∂R com a normal "para fora" da região R.Considere agora que queremos calcular o fluxo de um campo $\vec{F}$ para fora da região R (ou seja, através de sua fronteira, com a orientação dada). Pela definição, devemos calcular

$$\Phi = \iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Mas, por outro lado, podemos subdividir a região R em vários pequenos paralelepípedos, de modo que cada face de paralelepípedo só tenha duas alternativas: ou ela pertence a dois paralelepípedos desta subdivisão, ou pertence a um só. Aquelas faces que pertençam a dois paralelepípedos podem ser chamadas faces "interiores", e em cada paralelepípedo elas terão orientação distinta. Com isso, se calcularmos o fluxo para fora de cada paralelepípedo, será o mesmo que somar apenas nas faces "sem par", que podem ser chamadas faces "da fronteira". Assim, obtemos uma nova maneira de calcular o fluxo de $\vec{F}$ para fora da região R, que no limite usualmente calculado para somas de Riemann se aproxima da integral

$$\Phi = \iiint_{R} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV.$$

Claro que para esse argumento fazer sentido, o campo $\vec{F}$ tem que ser bem comportado em todos os paralelepípedos da subdivisão, ou seja, tem que ser bem comportado em R.

Com isso obtemos (ao menos a intuição geométrica do)

> **Teorema da Divergência** (Gauss): Se $\vec{F}$ é um campo bem comportado na região $R \subset \mathbb{R}^3$, com ∂R orientada para fora da região R, vale a igualdade
>
> $$\iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{R} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV.$$

Não podemos perder a oportunidade de reconhecer que este teorema também pertence à família do *teorema fundamental do cálculo*, se tratando, mais uma vez, de uma igualdade entre a integral de uma derivada de algo e um termo que só diz respeito a este algo na fronteira da região anterior.