Cálculo III

Departamento de Matemática - ICEx - UFMG
Marcelo Terra Cunha

Superfícies Paramétricas

Chegamos à reta final de nosso curso. Agora vamos tratar de superfícies e de integrais de superfície, incluindo os importantes teoremas de Gauss e de Stokes. Seguem uma recomendação e uma advertência. A recomendação é que essa é uma excelente oportunidade (caso você não tenha feito ainda) de ler os capítulos 2 e 3 do segundo volume das *Feynman Lectures on Physics*. A essência do que vamos estudar (e do que já estudamos) está lá. A advertência é que sem entender o que já passou no curso (em especial, curvas, integral de linha, mudança de variáveis, campos conservativos e o teorema de Green) é quase impossível entender o que virá adiante.

11.1 Conceitos Básicos

Assim como uma curva parametrizada foi descrita como uma função vetorial, uma superfície paramétrica será dada por uma função vetorial de duas variáveis:

$$\begin{array}{rrl} \vec{r}: & D \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) \mapsto & \left(x\left(u,v\right), y\left(u,v\right), z\left(u,v\right)\right), \end{array}$$

onde $D \subset \mathbb{R}^2$. Com isso, enquanto curvas são objetos unidimensionais, superfícies serão objetos bidimensionais.

Dois problemas complementares são muito importantes: reconhecer uma superfície que é dada parametricamente, incluindo a determinação de algumas propriedades geométricas; para uma superfície conhecida geometricamente, descrevê-la parametricamente.

O primeiro é um problema de *visualização*, e nele um computador porde ajudar muito. Já o segundo, é um problema de *parametrização*, no qual o talento humano ainda se sobressai às máquinas. Nele, o computador pode ser usado a posteriori, para verificar se uma parametrização escolhida corresponde, de fato, à superfície desejada. Novamente, a escolha de uma boa parametrização pode tornar a solução de um problema simples ou muito complicada (até mesmo impossível).

Quando temos uma superfície dada parametricamente, é interessante estudar o que acontece com cada parâmetro individualmente. SE fixamos $v = v_o$, teremos

$$\vec{r}\,(u, v_o) = (x\,(u, v_o)\,, y\,(u, v_o)\,, z\,(u, v_o))$$

que é uma função vetorial do parâmetro u. Nos casos favoráveis, trata-se de uma curva. Da mesma forma, se fixarmos $u = u_o$, teremos

$$\vec{r}\,(u_o, v) = (x\,(u_o, v)\,, y\,(u_o, v)\,, z\,(u_o, v))\,.$$

Uma maneira de nos referirmos a essas curvas é como curvas u-paramétricas e curvas v-paramétricas, respectivamente. Entender tais famílias de curvas é uma boa maneira de entender a superfície paramétrica.

Queremos agora estabelecer o conceito de *regularidade* para superfícies paramétricas. Da mesma forma que aconteceu para as curvas, esta será uma definição feita em termos da parametrização (dada ou escolhida), mas com conseqüências importantes sobre a geometria da superfície em questão. Uma forma de enunciar tal conceito é pedir que por cada ponto (u_o, v_o) passem curvas u-paramétricas e v-paramétricas regulares e com vetores tangentes independentes. Lembrando que a regularidade das curvas corresponde a ter vetores velocidade não-nulos, e que as superfícies que trabalhamos estão no espaço tridimensional, podemos verificar todas estas condições fazendo o produto vetorial dos vetores tangentes a estas curvas. Se ele for não-nulo em todo ponto, teremos uma *superfície parametrizada regular*.

Vamos então fixar notação e interpretar os objetos que já apareceram nesta discussão. Temos

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \\ \vec{r}_v &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \end{aligned}$$

que representam, para cada ponto, os vetores velocidade as curvas u-paramétricas e v-paramétricas, respectivamente.

Para verificar sua independência, calculamos

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v,$$

que é diferente de zero se, e só se, os vetores $\vec{r}_u$ e $\vec{r}_v$ são independentes. Como mais podemos interpretar $\vec{N}$? Se $\vec{r}_u$ e $\vec{r}_v$ são independentes eles são os geradores do plano tangente à superfície, no ponto $\vec{r}\,(u_o, v_o)$. Parametricamente,

$$(\xi, \zeta) \mapsto \vec{r}\,(u_o, v_o) + \xi \vec{r}_u\,(u_o, v_o) + \zeta \vec{r}_v\,(u_o, v_o)$$

descreve este plano. Assim, $\vec{N}$ é o vetor normal ao plano tangente da superfície, em cada ponto onde é calculado. Essa interpretação já traz boa parte do significado de termos uma parametrização regular para uma superfície: como existe o plano tangente em cada ponto (e ele varia suavemente), esta é uma superfície *lisa*, sem bicos.

Exemplo: para as duas superfícies paramétricas abaixo, descreva-as geometricamente e decida se são superfícies regulares.

a) $D = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, $\vec{r}\,(u, v) = (v \cos u, v \,\operatorname{sen} u, v)$;

b) $D = \mathbb{R} \times (1, 2)$, $\vec{r}\,(u, v) = (v \cos u, v \,\operatorname{sen} u, u)$.

11.2 área de uma superfície

Tão importante quanto calcular o comprimento de uma curva é calcular a área de uma superfície. Felizmente já temos todos os ingredientes em mãos. Se você voltar à justificativa geométrica do jacobiano de uma transformação no plano (aula 6) poderá adaptá-la para esta situação de agora, onde também devemos quebrar o domínio D em pequenos retângulos nas variáveis u, v, e calcular a área do paralelogramo que melhor aproxima o pedaço de superfície que é imagem deste pequeno retângulo. A área deste paralelogramo é $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$, e assim, se temos uma parametrização regular que cobre toda a superfície e não passa mais que uma vez por nenhum pedaço da superfície com área[1], a área da superfície parametrizada será dada por

$$A\,(S) = \int\int_S dA = \int\int_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \;\, du \; dv, \qquad (11.1)$$

onde deve ser reconhecida a estrutura de sempre: queremos integrar a função constante igual a 1 ao longo da superfície S, para isso usamos a parametrização:

[1]Pode haver alguns pontos que são imagem de vários pontos no domínio, mas estes precisam "ser poucos". é a situação, por exemplo, quando parametrizamos a esfera unitária como $(\cos u \cos v, \cos u \,\operatorname{sen} v, \,\operatorname{sen} u)$, com $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

a região de integração é o domínio da parametrização, a função a ser integrada continua sendo 1, é o *elemento de integração* tem que ser reescrito em termos das variáveis de integração - é esse o significado do $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$ nessa expressão[2].

11.3 Integral de Superfície

Novamente, é claro que entendido o elemento de área em uma superfície, podemos calcular integrais de outras funções definidas ao longo da superfície. Por exemplo, se σ é a densidade superficial de massa em uma folha descrita por uma superfície parametrizada, poderemos calcular a sua massa total:

$$M = \int\int_S \sigma \ dA = \int\int_D \sigma\,(u,v) \ \ \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \ \ du \ dv.$$

Procure exemplos e exercícios em qualquer livro de cálculo e, se necessário, aproveite essa última oportunidade para entender os conceitos de centro de massa e de valor médio de uma função.

[2]Diga-se de passagem, o mesmo significado do determinante jacobiano em qualquer mudança de variáveis.