# Cálculo III

Departamento de Matemática - ICEx - UFMG
Marcelo Terra Cunha

## Rotação de Campos Vetoriais: Teorema de Stokes

Na aula anterior vimos que uma superfície pode ser a fronteira de uma região em $\mathbb{R}^3$ e o Teorema de Divergência nos ensinou a relação entre o fluxo através desta fronteira e a integral tripla da divergência do campo, também definida na aula passada. Agora vamos lembrar que muitas superfícies possuem, elas mesmas, fronteiras, dadas pela união de curvas orientadas. Uma generalização do Teorema de Green nos permitirá relacionar a integral de linha do campo $\vec{F}$ ao longo de tal fronteira com o fluxo do *rotacional* de $\vec{F}$ ao longo da superfície. Naturalmente, seremos levados nesta discussão a definir *rotacional* de $\vec{F}$.

## 13.1 Superfícies com Fronteiras

Já vimos vários exemplos de superfícies parametrizadas, como a esfera, o hemisfério, cilindros (limitados ou infinitos), gráficos de funções de duas variáveis... mas ainda não atentamos para o detalhe que superfícies podem ter fronteiras.

Não vamos buscar uma definição formal de fronteira de superfície[1], mas trabalhar com a intuição de tal conceito (que também pode ser chamado *bordo*). Uma esfera é uma superfície sem fronteira. Um hemisfério tem como fronteira seu equador. Um cilindro ilimitado não tem fronteira, enquanto um cilindro limitado tem uma fronteira dada por duas peças distintas (*e.g.* para o cilindro dado por $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, a fronteira terá duas circunfrências). Para um gráfico de uma função contínua de duas variáveis definidas na região plana $R$, a fronteira é a restrição desta função à fronteira $\partial R$.

Fica como exercício definir se a faixa de Möbius tem fronteira e, em caso afirmativo, como será tal fronteira.

[1] O que pode ser feito, modificando ligeiramente a definição de superfície com que temos trabalhado (*"isso dá pra fazer"*).

### 13.1.1 Convenção de Orientação

Desde a noção de fronteira de região no plano[2] que definimos convenções sobre como devemos orientar fronteiras. O objetivo central sempre é tornar coerente uma expressão como a do Teorema Fundamental do Cálculo, onde a integral de uma derivada é substituída por um termo de fronteira. Tanto a integral como o "termo de fronteira" dependem de orientação e é importante que estas escolhas sejam consistentes.

Dito isto, só precisamos nos preocupar em orientar a fronteira de superfícies *orientáveis*[3]. Neste caso, a convenção é herdada da convenção usada para orientar regiões do plano. Basta considerar uma região do plano $xy$ como um caso particular de superfície parametrizada por $(x, y, 0)$, com isso tendo como vetor normal $(0, 0, 1)$. A convenção anterior podia ser enxergada como "andar sobre a curva, com a cabeça apontando para o vetor normal, tendo a superfície à esquerda" definia a orientação positiva para a fronteira. Esta mesma convenção continua valendo para superfícies orientadas quaisquer, sendo apenas um pouco mais difícil de ser visualizada.

Para se acostumar, escolha um vetor normal para cada superfície dada como exemplo e determine a orientação de cada pedaço de sua fronteira.

## 13.2 A idéia Geométrica: Green para Superfícies

Agora podemos caminhar para o resultado central da aula de hoje. Para isso vamos lembrar do teorema de Green e buscar sua generalização para superfícies orientadas com fronteira.

### 13.2.1 Lembrando o Teorema de Green

O teorema de Green nos dizia[4] que, se $\partial R$ fosse fronteira da região $R$ do plano $xy$ e o campo $\vec{F} = (F_x, F_y)$ fosse bem comportado[5] em toda a região $R$, então

$$\oint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \, dA. \tag{13.1}$$

[2] E, reinterpretando resultados anteriores, concluímos que desde a noção de intervalo.
[3] Já que nas superfícies não-orientáveis não está definida a integral de campos vetoriais.
[4] Reveja aula 10.
[5] Segundas derivadas contínuas.

A idéia essencial que leva ao Teorema de Green foi apresentada na secção 10.2: a igualdade entre o termo $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}$ e a integral de circulação para um pequeno retângulo. Depois só tivemos que usar o conceito de soma de Riemann e a convenção de orientação. Agora resta generalizar estas idéias...

### 13.2.2 Rotação ao redor de um eixo arbitrário em um ponto qualquer

Para chegarmos ao Teorema de Stokes devemos substituir a integral dupla por uma integral de superfície. Para isso consideramos o teorema de Green como um caso particular, onde a superfície em questão é uma região do plano $xy$. A idéia será definir, para um dado campo $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, um novo campo tal que seu produto escalar com um vetor unitário dará a circulação em torno do eixo definido por este vetor unitário. Embora houvesse outras formas de fazer isso, a mais simples é obter suas componentes cartesianas, considerando os vetores normais $\vec{i}$ e $\vec{j}$ em lugar do $\vec{k}$ já obtido. Assim definimos

$$\text{rot}\vec{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right), \tag{13.2}$$

para o qual também vale a notação mneomônica $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ (verifique!).

Assim, dado um campo $\vec{F}$, seu *rotacional* $\text{rot}\vec{F}$ é outro campo, que aponta na direção de maior rotação do campo naquele ponto, e tem norma igual ao valor desta rotação infinitesimal máxima (*i.e.* à razão entre a rotação em um pequeno retângulo no plano normal a $\text{rot}\vec{F}$ e sua área).

## 13.3 Rotacional e Teorema de Stokes

Com isso podemos enunciar o

> Teorema de Stokes: Sejam $S$ uma superfície regular orientada, $\partial S$ sua fronteira, com a convenção de orientação já discutida, e $\vec{F}$ um campo diferenciável em uma região que inclui $S$. Vale a igualdade
>
> $$\int\!\!\int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \, d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{13.3}$$

Aqui devemos comparar com o Teorema de Green. O termo da integral de linha tem apenas uma sutil mudança: a integral é feita em uma curva tridimensional ($\partial S$). Enquanto a integral dupla foi substituída por uma integral de superfície (o fluxo do rotacional de $\vec{F}$).

O exemplo mais explícito do Teorema de Stokes é dado pelo campo

$$\vec{F} = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right),$$

definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eixo } z\}$. Faça o cálculo para ver que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$. Em seguida use o Teorema de Stokes para concluir quanto vale $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para dois exemplos de curvas: aquelas que não englobam o eixo $z$ e aquelas que dão uma volta em torno do eixo $z$.