

Mudança de Coordenadas

Na aula 3 discutimos como usar coordenadas polares em integrais duplas, seja pela região ser mais bem adaptada a este sistema, seja pela função ficar melhor escrita assim. Na aula 5 retornamos ao tema, com as coordenadas polares cilíndricas e esféricas sendo usadas para as integrais triplas. Agora vamos abordar a teoria geral de *mudança de coordenadas* em integrais múltiplas.

6.1 Funções de uma variável

No cálculo I, as mudanças de variável vinham disfarçadas no chamado método de substituição para a cálculo de integrais definidas.

Neste caso, se $x = g(u)$, podíamos resolver uma integral $\int_a^b f(x) dx$ calculando $\int_\alpha^\beta f(g(u)) g'(u) du$, onde $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$.

Os três ingredientes básicos da mudança de coordenadas para a integração já aparecem nesta fórmula do cálculo 1:

- Temos que reescrever a função nas novas variáveis: $f(g(u))$;
- Temos que cuidar da região de integração: \int_α^β ;
- Temos que cuidar do elemento de integração: $dx = g'(u) du$.

Antes de seguir adiante, vamos detalhar um pouco mais esse processo e escrever uma fórmula equivalente para ele.

Reescrever a função não tem segredo: conhecemos a função $f(x)$ e a mudança de variáveis $x = g(u)$, bastando compô-las.

A região de integração, em uma variável, será sempre um intervalo. O caso mais natural é aquele em que g é uma bijeção (evitando assim que passemos “mais de uma vez” por um mesmo ponto ou intervalo). Se g for bijetiva e tiver derivada contínua, só restam duas alternativas: ou g é crescente ou

decrecente. No primeiro caso, $\alpha = g^{-1}(a) < \beta = g^{-1}(b)$ e a integral escrita está na ordem que naturalmente fazemos integrais definidas. Já se g for decrescente, estaremos percorrendo o intervalo $[\beta, \alpha]$ “na contra-mão”, o que pode ser entendido como integrar no intervalo $[\beta, \alpha]$ e colocar o sinal negativo no resultado.

O elemento de integração é a essência da mudança de coordenadas. Você deve se lembrar que a interpretação da derivada é como aproximação linear e que o dx tem sua origem nos comprimentos Δx das somas de Riemann. O termo $g'(x)$ faz essa “conversão de unidades”, dizendo quanta variação em x vai corresponder a uma variação padrão em u . Juntando com o parágrafo anterior, se g for crescente, teremos $g'(x) > 0$, enquanto se g for decrescente, $g'(x) < 0$, isso valendo em todo o intervalo.

Assim, tendo o cuidado de escolher uma mudança de coordenadas g que seja inversível e com derivada contínua, chamando de $I = [a, b]$ e de $J = g^{-1}(I)$, a fórmula de mudança de variáveis pode ser reescrita como

$$\int_I f(x) dx = \int_J f(g(u)) |g'(u)| du, \quad (6.1)$$

onde agora o intervalo de integração é visto sempre como um intervalo a ser percorrido do menor para o maior e a razão entre os elementos de integração é feita de modo a sempre ter um “elemento de integração positivo”. Note que no caso de g crescente, essas duas mudanças são inócuas, enquanto no caso de g decrescente, ambas mudam o sinal da integral, que portanto fica inalterado.

No cálculo 1 não havia por que introduzir estas modificações na fórmula de mudança de variáveis deduzida diretamente da regra da cadeia para derivação de funções compostas. Mas para integrais múltiplas, a versão (6.1) é a mais naturalmente generalizável.

6.2 Funções de Duas Variáveis

Vamos agora traçar o paralelo da situação anterior para duas variáveis. Lá, o problema era resolver uma integral $\int_I f(x) dx$, e tínhamos uma transformação $g : J \rightarrow I$ que nos permitia usar a expressão (6.1) para fazer este cálculo.

Nosso problema agora será calcular uma integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$ e para isso usaremos uma mudança de coordenadas (também chamada uma transformação) $T : S \rightarrow R$ e buscaremos a fórmula análoga à (6.1). É adequado repetirmos a exigência de T ser bijetiva e ter derivadas (parciais) contínuas¹.

Insistimos mais uma vez que o problema se faz:

- Reescrevendo a função;
- Redefinindo a região de integração;
- Reescrevendo o elemento de integração, neste caso, o dA .

Reescrever a função significa compor a função conhecida com a mudança de coordenadas. Redefinir a região de integração pode ser complicado em cada exemplo, mas no cenário aqui montado, é usar a região $S = T^{-1}(R)$. Todo nosso problema passa a ser o elemento de integração.

Primeiro vamos à interpretação geométrica: o dA vem das áreas ΔA da partição utilizada nas somas de Riemann. Se usamos variáveis (u, v) na região S e (x, y) na região R , consideramos que a transformação T pode ser escrita na forma $(x(u, v), y(u, v))$. Assim, considerando x e y como coordenadas cartesianas usuais, sabemos que $dA = dx dy$ e o desafio é relacionar este dA (definido naturalmente em R) com os elementos du e dv .

Novamente, a questão é infinitesimal e a derivada é o instrumento adequado para trabalhar com pequenas variações. Para chegarmos à fórmula de mudança de variáveis para integrais duplas, vamos começar resolvendo a seguinte questão: considere um pequeno retângulo de área $\Delta u \Delta v$ em S ; qual a área da sua imagem em R ?

Consideramos então, em S , o retângulo com vértices (u, v) , $(u + \Delta u, v)$, $(u, v + \Delta v)$ e $(u + \Delta u, v + \Delta v)$. A imagem deste retângulo pela transformação T será uma região delimitada por quatro curvas, cada uma delas imagem de uma das arestas do retângulo. Calcular a área desta região, sem informações adicionais, é calcular uma integral dupla da função constante igual a 1 nesta região e não teríamos mais para onde avançar. Mas como estamos trabalhando com Δu e Δv pequenos², podemos lançar mão do cálculo diferencial para aproximar esta área de maneira que, no limite em que Δu e Δv vão a

¹Essas condições podem ser ligeiramente relaxadas, mas é mais fácil considerarmos estas restrições válidas e depois discutir o quanto podemos “flexibilizá-las”.

²Pequenos aqui significa em comparação com as variações da transformação T .

zero, o erro de nosso cálculo vai a zero ainda mais rápido. Como sempre, você deve tentar fazer uma figura para entender o que se passa.

Nestas condições, temos

$$\begin{aligned} T(u + \Delta u, v) &\approx T(u, v) + \frac{\partial T}{\partial u}(u, v) \Delta u, \\ T(u, v + \Delta v) &\approx T(u, v) + \frac{\partial T}{\partial v}(u, v) \Delta v, \end{aligned}$$

o que nos permite pensar em um paralelogramo cuja área aproxima a área da região desejada. Devemos lembrar que $\frac{\partial T}{\partial u} \Delta u$ denota um vetor, assim como $\frac{\partial T}{\partial v} \Delta v$, e que queremos então calcular a área do paralelogramo formado por estes dois vetores. Para isso a Geometria Analítica nos dá a receita:

$$\begin{aligned} \Delta A &\approx \left\| \frac{\partial T}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial T}{\partial v} \Delta v \right\| \\ &= |J(u, v)| \Delta u \Delta v, \end{aligned}$$

onde definimos $J(u, v)$, também chamado *determinante Jacobiano* da transformação T (ou, simplesmente, Jacobiano), que significa

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

o que sugere a notação também utilizada:

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Com essa justificativa geométrica, não deve ser difícil aceitar que a fórmula para mudança de variáveis para funções de duas variáveis é

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \quad (6.2)$$

onde novamente reconhecemos os três ingredientes já discutidos.

Como primeiro exemplo, vamos tomar uma caso já bem conhecido:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta,$$

de onde segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -r \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \end{aligned}$$

e se adotamos a convenção de só trabalhar com $r \geq 0$, temos

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r,$$

de onde segue nossa velha conhecida

$$\int \int_R f(x, y) \, dx \, dy = \int \int_S f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \, r \, dr \, d\theta,$$

como uma aplicação da fórmula (6.2).

Vários outros exemplos (e algumas discussões) caberiam aqui, mas por falta de espaço e de tempo, passemos para o caso geral.

6.3 Funções de Três Variáveis

Embora discutida no caso de duas variáveis, e com a notação reforçando isso, a fórmula (6.2) necessita muito poucos ajustes para ser uma fórmula absolutamente geral. Não vamos nos preocupar em escrever esta fórmula geral, mas sim em escrever sua análoga para três variáveis.

Novamente, redescrever a região e escrever a função a ser integrada nas novas variáveis são parte natural do problema. A discussão sobre o elemento de integração se generaliza, se lembrarmos dos dois ingredientes essenciais ali: a derivada como aproximação linear da transformação e o determinante como uma razão entre volumes (orientados).

Se agora consideramos R e S como regiões de \mathbb{R}^3 , com $(x, y, z) = T(u, v, w)$, $R = T(S)$ temos

$$\int \int \int_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int \int \int_S f(T(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw, \quad (6.3)$$

onde o Jacobiano em questão é dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

O exemplo das coordenadas cilíndricas fica de exercício, mas façamos o caso das coordenadas esféricas até para pagar nossa dívida da aula anterior:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, z = \rho \cos \phi,$$

leva a

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} &= \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \cos \phi \\ \rho \cos \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \\ -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \rho^2 \operatorname{sen} \phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \cos \phi \\ \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \operatorname{sen} \theta & -\operatorname{sen} \phi \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

onde fica como exercício mostrar que o último determinante a ser calculado vale 1. Novamente, se adotarmos a convenção que $\phi \in [0, \pi]$, teremos $\operatorname{sen} \phi \geq 0$ e o valor absoluto da fórmula (6.3) pode ser omitido, resultando na já conhecida fórmula de integração em coordenadas polares esféricas.