Capítulo 5

Edo's de Segunda Ordem

Neste capítulo estamos interessados em estudar equações de segunda ordem, isto é, edo's do tipo:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x)\right) = 0$$

Achar soluções gerais de qualquer tipo de edo de segunda ordem está fora do contexto destas notas. Por exemplo, com os métodos desenvolvidos neste capítulo não poderemos achar as soluções das seguintes edo's:

Exemplo 48.

1. A edo de Legendre de ordem α:

$$(1 - x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + \alpha\, (\alpha + 1)\, y = 0.$$

2. A edo de Bessel de ordem $\mu \geq 0$:

$$x^2\, y'' + \, x\, y' + (x^2 - \mu^2)\, y = 0.$$

Nos trataremos sistematicamente apenas de duas classes de edo's de segunda ordem: as que podem ser reduzidas a edo's de primeira ordem e as lineares. Isto não tão é restritivo como pode parecer, pois com estas edo's podemos modelar uma grande quantidade de fenômenos.

5.1 Edo's de Segunda Ordem Redutíveis

Consideremos a edo de segunda ordem:

$$y'' = f(x, y, y').$$

As soluções de alguns tipos de edo's de segunda ordem podem ser obtidas utilizando os métodos estudados no capítulo anterior nos seguintes casos:

i) Quando f não depende de de y e y′:

$$\boxed{y'' = f(x).}$$

Integrando duas vezes a edo:

$$y(x) = \int \left(\int f(x)\,dx + c_1 \right) dx + c_2,$$

se $F(x) = \int f(x)\,dx$; então:

$$\boxed{y(x) = \int F(x), dx + c_1\,x + c_2.}$$

Exemplo 49.

Seja $y'' = cos(2\,x)$, a edo não depende de y e de y'; logo:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int cos(2\,x)\,dx = \frac{sen(2\,x)}{2}, \\ y &= \int \frac{sen(2\,x)}{2}\,dx + c_1\,x + c_2, \\ y &= -\frac{cos(2\,x)}{4}\,dx + c_1\,x + c_2. \end{aligned}$$

ii) Quando f não depende de de y:

$$\boxed{y'' = f(x, y').}$$

Fazemos $p = y'$; então, $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = y''$; logo, obtemos a edo:

$$\boxed{p' = f(x, p),}$$

que é de primeira ordem em p.

Exemplo 50.

Seja $(1+x)\,y''+y'=0$, não depende de y ; fazendo $p=y'$:

$$(1+x)\,p'+p=0,$$

que é uma edo de variáveis separáveis:

$$\frac{p'}{p}=-\frac{1}{1+x},$$

e

$$\int\frac{dp}{p}+\int\frac{dx}{1+x}=\ln(p)+ln(1+x)=ln(p\,(1+x)),$$

então $ln(p\,(1+x))=ln(c_1)$; logo, $p\,(x+1)=c_1$ obtendo $y'=\dfrac{c_1}{x+1}$, e:

$$y=c_1\int\frac{dx}{x+1}+c_2=c_1\,ln(x+1)+c_2.$$

iii) Quando f não depende de de x e de y′:

$$\boxed{y''=f(y).}$$

Fazemos $p=y'$; então, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\,(p(y(x)))=p\,\dfrac{dp}{dy}$; logo, obtemos a edo:

$$\boxed{p\,\frac{dp}{dy}=f(y),}$$

que é de variáveis separáveis em p.

Exemplo 51.

Seja $y''=-4\,y^{-3}$, $y>0$. A edo só depende de y, como $f(y)=-4\,y^{-3}$, obtemos:

$$p\,\frac{dp}{dy}=-4\,y^{-3}.$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}\int p\,dp&=-4\int y^{-3}\,dy+c_1\\ p^2&=\frac{4}{y^2}+c_1\\ p&=\pm\sqrt{\frac{4}{y^2}+c_1}\\ \frac{dy}{dx}&=\pm\sqrt{\frac{4}{y^2}+c_1}.\end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{y}{\sqrt{c_1\,y^2+4}}\,y' = \pm 1$, integrando:

$$\begin{aligned}\sqrt{c_1\,y^2+4} &= \pm c_1\,x + c_2\\ c_1\,y^2 &= (\pm c_1\,x + c_2)^2 - 4.\end{aligned}$$

iv) Quando f não depende de de x:

$$\boxed{y'' = f(y, y').}$$

Fazemos $p = y'$; então, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\,(p(y(x))) = p\,\dfrac{dp}{dy}$; logo, obtemos a edo:

$$\boxed{p\,\frac{dp}{dy} = f(y, p),}$$

que é de primeira ordem em p.

Exemplo 52.

Seja $y\,y'' = y^2\,y' + (y')^2$, $y \neq 0$. A edo não depende de x. Como:

$$f(y, p) = f(y, y') = y\,y' + \frac{(y')^2}{y} = y\,p + \frac{p^2}{y};$$

logo obtemos a edo de primeiro ordem linear:

$$p' - \frac{p}{y} = y,$$

cuja solução é $p = y^2 + c_1\,y$; logo, $y' = y^2 + c_1\,y$ que é de variáveis separáveis:

$$\frac{y'}{y^2 + c_1\,y} = 1$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + c_1\,y} = x + c_2,$$

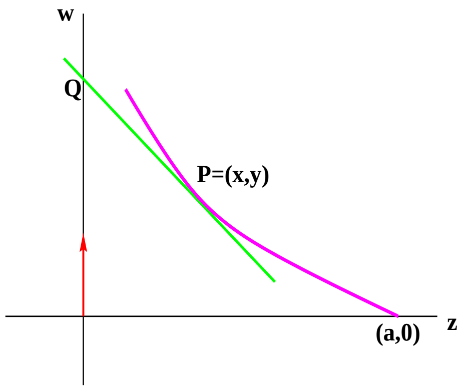
logo,

$$y = c_2\,(y + c_1)\,exp(x).$$

5.2 Aplicações

5.2.1 Curva de Perseguição

Suponha que na origem do plano temos uma presa que foge de um predador ao longo do eixo dos y com velocidade constante v. O predador localizado no ponto $(a, 0)$ persegue a presa correndo sempre na direção em que se encontra a presa com velocidade constante w. Determinaremos a curva descrita pelo predador e as condições sobre a, v e w para o predador encontrar a presa. Considere o seguinte desenho:



Após de um tempo t o predador se encontra no ponto P e a presa no ponto $Q = (0, v\,t)$. O deslocamento do predador entre o ponto G e P é $w\,t$; logo:

$$w\,t = \int_x^a \sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$$

O ponto Q é a interseção da reta tangente da curva no ponto P, a equação desta reta é $w - y = w'\,(z - x)$, se $z = 0$; então, $\overline{OQ} = y - x \left(\dfrac{dy}{dx}\right)$. Por outro lado $\overline{OQ} = v\,t$; logo:

$$\frac{v}{w} \int_x^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \frac{v}{w}\,(w\,t) = v\,t = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Fazendo $c = \dfrac{v}{w}$ e derivando em relação a x em ambos os lados, obtemos:

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2} = c\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

que é uma edo de segunda ordem que não depende de y; logo, fazemos $p = y'$ e $p' = y''$, temos a edo de variáveis separáveis:

$$\begin{aligned} x\,p' &= c\,\sqrt{1+p^2} \\ \frac{p'}{\sqrt{1+p^2}} &= \frac{c}{x}, \end{aligned}$$

logo, $ln\left(\left|\sqrt{1+p^2}+p\right|\right) = c\,ln(x) + ln(k)$ e:

$$\sqrt{1+p^2}+p = k\,x^c.$$

Como a trajetória do predador se inicia no ponto $G = (a,0)$, temos: $y'(a) = 0$ ou $p = 0$ e $k = \dfrac{1}{a^c}$, então podemos escrever a solução como:

$$\sqrt{1+p^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^c - p,$$

de onde obtemos:

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^c\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{2c}-1\right)$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^c - \left(\frac{a}{x}\right)^c\right).$$

Logo, as soluções da edo são:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{c+1}\left(\dfrac{x}{a}\right)^{c+1} + \dfrac{a}{c-1}\left(\dfrac{a}{x}\right)^{c-1}\right) + k_1 & \text{se} \quad c \neq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2\,a} - a\,ln|x|\right) + k_2 & \text{se} \quad c = 1. \end{cases}$$

Como $y(a) = 0$, para $c \neq 1$ temos que $k_1 = \dfrac{a\,c}{1-c^2}$ e:

$$y = \frac{a/2}{}\left(\frac{1}{c+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{c-1}\right) - \frac{a\,c}{1-c^2}.$$

Analogamente para $c = 1$:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2\,a} - a\,ln|x|\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - a\,ln|a|\right).$$

Lembrando que $c = \dfrac{v}{w}$, logo:

i) Se $v \geq w$; então:

$$\lim_{x \to 0+} y(x) = +\infty$$

o predador não pega a presa.

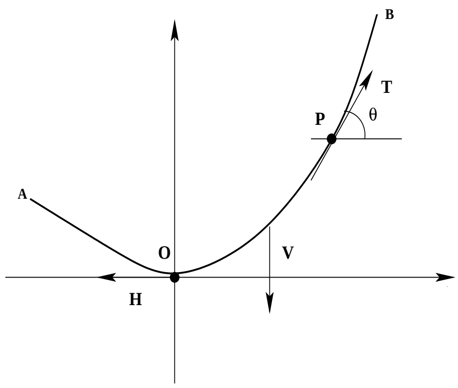
ii) Se $v < w$; então $c < 1$ e:

$$\lim_{x \to 0+} y(x) = -\frac{a\,c}{c^2 - 1}$$

este é o ponto onde predador pega a presa.

5.2.2 Catenária

O problema é determinar a forma que toma um cabo flexível, suspenso em dois pontos e sujeito a seu peso. Este problema foi proposto por Leonardo da Vinci e resolvido por vários matemáticos, entre eles, Leibniz e J. Bernoulli; foi Leibniz que deu o nome de catenária à curva solução do problema.
Suporemos que temos um cabo flexível e inextensível suspenso em dois pontos A e B. Temos:



Vamos localizar a origem do plano no ponto mais baixo da curva formada pelo cabo e analisar as forças que atuam no trecho OP. Como o cabo é flexível segue que as tensões são tangentes. Temos as tensões H e T e o peso do segmento OP, que denotaremos por V. Estas forças estão em equilíbrio, logo

$$H + T + V = 0.$$

Em termos das componentes, temos:

$$-H + T\cos\theta = 0$$
$$-V + T\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

logo,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{V}{H}$$

Vamos expressar as forças pelo comprimento do arco. Sejam ω o peso por unidade de comprimento e s o comprimento do arco OP. Podemos expressar $V = \omega\, s$. Note que H e ω são constantes e:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta = \frac{V}{H} = \frac{\omega s}{H} = cs, \qquad c = \frac{\omega}{H}$$

Logo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c\frac{ds}{dx} = c\,\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = c\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Observem que esta edo é uma dos tipos especiais de equações de segunda ordem apresentados. Vemos que o lado direito não depende nem de x e nem de y.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Vamos considerar a mudança de variável:

$$p = \frac{dy}{dx},\ \frac{dp}{dx} = y'' = c\sqrt{1+p^2};\text{ então } \int \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,dp = \int c\,dx$$

fazendo a mudança:

$$p = \operatorname{tg} u\; dp = \sec^2 u\, du;\text{ então } \int \sec u\, dp = c\,x + k_1.$$

Logo: $c\,x + k_1 = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| = \ln\sqrt{1+p^2} + p$; e:

$$\sqrt{1+p^2} + p = e^{cx+k_1}$$

Escrevendo: $1 + p^2 = p^2 - 2\,p\,e^{cx+k_1} + e^{2cx+2k_1}$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = p(x) = \operatorname{senh}(c\,x + k_1);$$

que tem solução:

$$y(x) = \frac{1}{c}\cosh\left(c\,x + k_1\right) + k_2.$$

Vejamos como determinar as constantes k_1 e k_2. Lembremos que $x = 0$ é o ponto mais baixo da nossa curva. A tangente de y no ponto O é nula. Isto é:

$$\frac{dy}{dx}(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{c_0+k_1} - e^{-c_0-k_1}) \Rightarrow k_1 = 0$$
$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = y(0) = \frac{1}{c}\cosh(cx) + k_2 = \frac{1}{c} + k_2$$

Portanto, nossa solução é:

$$y(x) = \frac{\cosh(c\,x) - 1}{c}.$$

O gráfico de $y = y(x)$ é chamada **catenária**.

5.3 Equações Lineares de Segunda Ordem

Neste parágrafo estamos interessados em estudar equações lineares de segunda ordem, isto é, edo's do tipo:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = r(x).} \tag{5.1}$$

A edo

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = 0.} \tag{5.2}$$

é dita **homogênea** associada a edo (5.1).

Se $r(x) \not\equiv 0$, a edo (5.1) é dita **linear não-homogênea.**

Vamos enunciar, para as edo's de segunda ordem, um teorema de existência e unicidade de solução.

Teorema 3. *Sejam $p,\, q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tal que $x_0 \in I$, então o PVI:*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,\dfrac{dy}{dx} + q(x)\,y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ \dfrac{dy}{dx}(x_0) = y_1 \end{cases}$$

tem uma única solução definida no intervalo I.

Observação 17.

1. A demonstração deste teorema é simples mas depende de um resultado de existência e unicidade geral que veremos no apêndice.
2. As equações lineares são especiais pois para elas temos garantida a existência e unicidade de soluções. Na verdade, este resultado vai a ser generalizado para equações lineares de ordem n.
3. É possível provar que se $p,\, q \in C^k(I)$ então a solução de (5.2), $y \in C^k(I)$.

Nosso objetivo é determinar uma solução geral da edo (5.1), provaremos que tal solução é do tipo:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x),}$$

onde y_h é a solução geral de (5.2) e y_p é uma solução particular de (5.1).

Claramente $y(x) = 0$ é a única solução da edo (5.2) tal que $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Se y_1 e y_2 são soluções da edo (5.2); então, $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ também é solução de (5.2).

5.3.1 Álgebra Linear I

Consideremos o conjunto:

$$V^n = \{y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, y \in C^n(I)\}.$$

V é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, de fato, do Cálculo sabemos que para todo y_1 e $y_2 \in V^n$, λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in V^n.$$

Logo a estas funções podemos dar um tratamento análogo aos vetores em Álgebra Linear.
A seguir vamos estabelecer um critério para verificar se duas soluções y_1 e $y_2 \in V^2$ de (5.2) são linearmente independentes.

Definição 20.

As funções y_1 e $y_2 \in V^2$ são chamadas **lineramente dependentes (ld)**, se uma é um múltiplo constante da outra. Isto é, λ

$$y_1(x) = \lambda\, y_2(x), \qquad \forall x \in I.$$

Caso contrário, são chamadas **linearmente independentes (li)**.

Exemplo 53.

1. As funções $y_1(x) = sen(x)$ e $y_2(x) = cos(x)$ são li para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. As funções $y_1(x) = sen(2\,x)$ e $y_2(x) = sen(x)\,cos(x)$ são ld para todo $x \in \mathbb{R}$, pois $f(x) = 2\,g(x)$.

Vejamos a seguir um critério para decidir quando duas soluções são li. Inicialmente, consideremos a seguinte definição.

Definição 21.

Dadas duas funções y_1 e $y_2 \in V^2$, o **Wronskiano** de y_1 e y_2 no ponto $x \in I$, é o determinante:

$$W(f,g)(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x). \end{bmatrix}$$

Exemplo 54.

Sejam $y_1(x) = e^{k_1 x}$ e $y_2(x) = e^{k_2 x}$; então:

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{bmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1\, e^{k_1 x} & k_2\, e^{k_2 x} \end{bmatrix} = (k_2 - k_1)\, e^{(k_1 + k_2) x},$$

logo, $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ se $k_1 \neq k_2$. As funções $y_1(x) = e^{k_1 x}$ e $y_2(x) = e^{k_2 x}$ são li, se $k_1 \neq k_2$.

Exemplo 55. *Sejam $y_1(x) = e^{kx}$ e $y_2(x) = x\, e^{kx}$; então:*

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{bmatrix} e^{kx} & x\, e^{kx} \\ k\, e^{kx} & e^{kx} + k\, x\, e^{x} \end{bmatrix} = e^{2kx},$$

logo, $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo k. As funções $y_1(x) = e^{kx}$ e $y_2(x) = x\, e^{kx}$ são li para todo k.

Teorema 4. *Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções de*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x)\, \frac{dy}{dx} + q(x) = 0$$

em um intervalo aberto I em que p e q são contínuas. Então, y_1 e y_2 são linearmente independentes, se e somente se $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ em um ponto de $x \in I$

($\Leftarrow$) Seja $x_0 \in I$ tal que $W(y_1, y_2)(x_0)(x) \neq 0$. Suponhamos, por contradição, que y_1 e y_2 sejam linearmente dependentes. Isto é, que existe λ tal que $y_1 = \lambda\, y_2$. Tome α_1 e α_1 tais que $\lambda = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$ e $\alpha_1 \neq 0$. Temos:

$$y_1 = \lambda\, y_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\, y_2; \quad \text{então,} \quad \alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2 = 0.$$

Portanto

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Observe que o determinante da matriz associada ao sistema linear acima é exatamente igual ao Wronskiano $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ no ponto x_0. Isto implicaria

que a única solução do sistema homogêneo seria a trivial. Isto é, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Contradição. Logo, y_1 e y_2 são linearmente independentes.
($\Rightarrow$) Vamos provar, na verdade, que $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Suponhamos que y_1 e y_2 sejam linearmente dependentes. E, suponhamos, por contradição, que exista $x_0 \in I$ tal que $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$. Isto nos diz que o sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 \, y_1\,(x_0) + \alpha_2 \, y_2\,(x_0) = 0 \\ \alpha_1 \, y_1'\,(x_0) + \alpha_2 \, y_2'\,(x_0) = 0 \end{cases}$$

tem uma solução não-trivial (α_1, α_2), ($\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_2 \neq 0$). Seja

$$\Phi(x) = \alpha_1 \, y_1(x) + \alpha_2 \, y_2(x).$$

Observe que, por construção, Φ é solução do PVI:

$$\begin{cases} \Phi'' + p(x)\,\Phi + q(x) = 0 \\ \Phi(x_0) = \alpha_1 \, y_1(x_0) + \alpha_2 \, y_2(x_0) = 0 \\ \Phi'(x_0) = \alpha_1 \, y_1'(x_0) + \alpha_2 \, y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Por outro lado, $\Psi(x) \equiv 0$ também é solução do PVI acima. Pelo Teorema de existência e unicidade, $\Psi = \Phi$ em I. Isto implica:

$$0 = \Psi(x) = \Phi(x) = \alpha_1 \, y_1(x) + \alpha_2 \, y_2(x) \quad \text{com} \quad \alpha_1 \neq 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_2 \neq 0$$

Ou seja, y_1 e y_2 são múltiplas. Contradição. Logo, $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ em todo $x \in I$.

Para finalizar nossa análise, resta saber se dadas y_1 e y_2 soluções li. de:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = 0.$$

Podemos afirmar que toda solução do problema acima é da forma:

$$\alpha_1 \, y_1 + \alpha_2 \, y_2?$$

Usaremos o teorema que acabamos de provar para estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 5. *Sejam y_1 e y_2 soluções linearmente independentes da edo:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = 0$$

em um intervalo aberto I em que p e q são contínuas. Se Y é solução da edo; então, existem constantes α_1 e α_2 tais que

$$Y(x) = \alpha_1\,y_1(x) + \alpha_2\,y_2(x), \quad \textit{para todo}\, x \in I$$

Prova: Fixe $x_0 \in I$ e considere o sistema

$$\begin{cases} \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) = Y(x_0) \\ \alpha y_1'(x_0) + \beta y_2'(x_0) = Y'(x_0) \end{cases}$$

Como y_1 e y_2 duas soluções linearmente independentes, temos $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. Logo, o sistema acima tem solução única (α_1, α_2). Seja $\Phi(x) = \alpha_1\,y_1(x) + \alpha_2\,y_2(x)$. Por construção, Φ é solução do PVI:

$$\begin{cases} \Phi'' + p(x)\,\Phi + q(x) = 0 \\ \Phi(x_0) = \alpha_1\,y_1(x_0) + \alpha_2\,y_2(x_0) = Y(x_0) \\ \Phi'(x_0) = \alpha_1\,y_1'(x_0) + \alpha_2\,y_2'(x_0) = Y'(x_0) \end{cases}$$

Por outro lado, $Y(x)$ também é solução do PVI. Pelo Teorema de existência e unicidade, $\Phi = Y$ em I. Isto implica:

$$Y(x) = \Phi(x) = \alpha_1\,y_1(x) + \alpha_2\,y_2(x), \qquad x \in I.$$

Logo, provamos que o conjunto das soluções da edo (5.2) é um subespaço vetorial de V^2 de dimensão 2.

Definição 22.

Sejam y_1 e y_2 soluções li da edo (5.2), dizemos que y_1 e y_2 formam um **conjunto fundamental** de soluções da equação homogênea.

Observação 18.

O último teorema nos diz que se y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental, então:

$$\alpha_1\,y_1(x) + \alpha_2\,y_2(x), \qquad \alpha_1,\, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

é a solução geral da equação homogênea (5.2).

Exemplo 56.

Sejam $y_1(x) = e^x$ e $y_2 = e^{-x}$. Verifique que estas funções são soluções de

$$y'' - y = 0 \tag{5.3}$$

e determine a solução geral da equação homogênea acima.
Vamos verificar que são soluções da edo (5.3):

$$(e^x)'' - e^x = e^x - e^x = 0 \qquad \text{e} \qquad \left(e^{-x}\right)'' - e^{-x} = e^{-x} - e^{-x} = 0.$$

Para construir a solução geral, precisamos de um conjunto fundamental. Logo, basta verificar se e^x e e^{-x} são li. Devemos provar que: $W(e^x, e^{-x}) \neq 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$. Consideremos $x_0 = 0$. Temos:

$$W(y_1, y_2)(0) = \det \begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^0 & e^{-0} \\ e^0 & -e^0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Logo,

$$y(x) = \alpha_1 \, e^x + \alpha_2 \, e^{-x}$$

é a solução geral da edo (5.2).

Teorema 6. *Seja $\{y_1,\, y_2\}$ um conjunto fundamental de soluções da edo (5.2) e y_p uma solução particular de (5.1); então a solução geral de (5.1) é:*

$$y(x) = c_1 \, y_1(x) + c_2 \, y_2(x) + y_p(x).$$

O teorema segue diretamente da seguinte observação:

Observação 19.

Se y_1 e y_2 são soluções de (5.1); então $y_1 - y_2$ é solução de (5.2).

Prova do teorema: Fixe y_p; seja y solução de (5.1). Pela observação, $y - y_p$ é solução de (5.2); logo, existem $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned} y(x) - y_p(x) &= c_1 \, y_1(x) + c_2 \, y_2(x) \\ y(x) &= c_1 \, y_1(x) + c_2 \, y_2(x) + y_p(x). \end{aligned}$$

5.3.2 Redução de Ordem

Vamos prosseguir nosso estudo das edo's homogêneas de segunda ordem para determinar seu conjunto fundamental.
Primeiramente, analisaremos o caso em que já conhecemos uma solução da edo homogênea e queremos determinar uma segunda que seja linearmente independente. Esse método é chamado de redução de ordem.
Vamos obter uma segunda solução $y_2(x)$ a partir de $y_1(x)$ que sejam li. Sabemos que qualquer múltiplo de $y_1(x)$

$$y(x) = c\, y_1(x)$$

ainda é solução da equação homogênea. Como desjamos uma nova solução que seja li, estes tipos de soluções não nos interessam. No entanto, não vamos abandonar completamente este idéia. Vamos tentar determinar soluções da forma:

$$y(x) = c(x)\, y_1(x),$$

onde $c(x)$ é uma função não constante, de modo que $y(x)$ seja solução da equação homogênea. Este argumento é chamado de variação de parâmetros. Sendo possível determinar tal $y(x)$, a nova solução e a antiga, $y_1(x)$, serão naturalmente linearmente independentes.
Vejamos que condições $c = c(x)$ deve satisfazer para que y seja solução. Calculemos as derivadas de y:

$$\begin{aligned} y' &= (c(x)\, y_1)' = c'\, y_1 + c\, y_1', \\ y'' &= c''\, y_1 + 2\, c'\, y_1' + c\, y_1'' \end{aligned}$$

Como queremos que y seja solução, deve satisfazer a edo:

$$\begin{aligned} & y'' + p\, y' + q\, y = 0, \\ & c''\, y_1 + 2\, c' y_1' + \; c y_1'' + p\; (c'\, y_1 + c\, y_1') + q\, c\, y_1 = 0, \end{aligned}$$

reescrevendo a última equação:

$$c\,(y_1'' + p\, y_1' + q\, y_1) + c''\, y_1 + 2\, c'\, y_1' + p\, c'\, y_1 = 0.$$

Como y_1 é solução, o resultado da expressão dentro do parênteses é zero, e:

$$c''\, y_1 + 2\, c'\, y_1' + p\, c'\, y_1 = 0.$$

Esta edo de segunda ordem se encaixa nas edo's estudadas no início do capítulo. Logo:

$$\boxed{c''\, y_1 + (2\, y_1' + p\, y_1) c' = 0,} \tag{5.4}$$

pode ser resolvida com a mudança de variável $v = c'$.

Exemplo 57. *Consideremos a edo:*

$$x^2\,y'' - 5\,x\,y' + 9\,y = 0, \qquad x > 0. \tag{5.5}$$

Observemos que $y_1(x) = x^3$ é solução da equação acima. De fato:

$$x^2\,y_1'' - 5\,x\,y_1' + 9\,y_1 = x^2\,6\,x - 5\,x\,3\,x^2 + 9\,x^3 = 0.$$

Vamos tentar determinar uma segunda solução da forma

$$y_2(x) = c(x)\,y_1(x) = c(x)\,x^3.$$

A edo (5.4) fica:

$$c'' + \frac{c'}{x} = 0.$$

Fazendo $p = c'$, obtemos:

$$\begin{aligned} & p' + \frac{p}{x} = 0 \\ & \frac{d}{dx}\,(x\,p) = 0 \\ & x\,p = k_1 \\ & p = \frac{k_1}{x}, \end{aligned}$$

então:

$$c(x) = k_1\,\ln x + k_2.$$

Como queremos apenas exibir uma segunda solução, podemos fazer a escolha que julgarmos mais simples. Por exemplo, podemos tomar

$$y_2(x) = c(x)\,y_1(x) = x^3\,\ln x$$

e, portanto, como y_1 e y_2 são linearmente idenpendentes e solucionam o problema homogêneo (5.5),

$$y(x) = k_1\,y_1 + k_2\,y_2 = k_1\,x^3 + k_2\,x^3\,\ln x$$

é solução geral de (5.5)

5.3.3 Álgebra Linear II

Nosso próximo objetivo é mostrar que as edo's:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = r(x)$$

podem ser tratadas como uma transformação linear T.

Definição 23.

Uma transformação linear $T : V^2 \to V^0$ se diz um operador diferencial liner de ordem 2 se puder ser colocado na forma:

$$T\,(\phi) = \frac{d^2\phi}{dx^2} + p\,\frac{d\phi}{dx} + q\,\phi.$$

Algumas vezes, é também escrito da forma $T = D^2 + p\,D + q$ onde D é o operador derivada. Isto é:

$$D\,(\phi) = \phi'.$$

Só para nos habituarmos à notação e verificarmos que o operador que definimos é de fato linear, consideremos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e $f,\ g \in V$. Se o operador for linear deveriamos ter:

$$T\,(\alpha\, f + \beta\, g) = \alpha\, T\,(f) + \beta\, T\,(g)\,.$$

Calculemos:

$$\begin{aligned}
T\,(\alpha\, f + \beta\, g) &= D^2\,(\alpha\, f + \beta\, g) + p\, D\,(\alpha\, f + \beta\, g) + q\,\,(\alpha\, f + \beta\, g)\\
&= \alpha D^2 f + \beta\, d^2 g + p\,\,(\alpha\, Df + \beta\, Dg) + \alpha\, q\, f + \beta\, q\, g\\
&= \alpha\, T\,(f) + \beta\, T\,(g)\,.
\end{aligned}$$

Portanto, para encontrarmos uma solução geral de (5.1), basta resolvermos um problema do tipo

$$T\,(y) = r,$$

onde T é um operador linear. Sabemos que toda solução y do problema acima pode ser escrita como:

$$y = y_p + y_h,$$

onde y_p é uma solução particular de $Ty = r$ e y_h uma solução do problema homogêneo, isto é $y_h \in N(T)$, onde $N(T)$ é o nucleo de T:

$$T\,(y) = 0.$$

Isto novamente nos diz que para solucionar o problema não-homogêneo, basta sermos capazes de descrever completamente o conjunto de soluções do problema homogêneo.
Se y_1 e y_2 são soluções do problema homogêneo, então $\alpha y_1 + \beta y_2$ também é solução. De fato, pela linearidade:

$$T\,(\alpha\, y_1 + \beta\, y_2) = \alpha\, T\,(y_1) + \beta\, T\,(y_2)$$

Ou seja, o conjunto de soluções do problema homogêneo é um subespaço vetorial de dimensão 2. Em Álgebra Linear, quando desejamos descrever os elementos de um espaço vetorial, procuramos uma base do espaço.
Todos os resultados obtidos no parágrafo anterior podem ser obtidos de forma muito mais consistente com a utilização de operadores. Por exemplo, o problema de achar a solução da edo (5.2):

Teorema 7. (Princípio de Superposição) *Sejam y_1 e y_2 soluções do problema homogêneo (5.2) no intervalo I, então a combinação linear $\alpha\, y_1 + \beta\, y_2$ também é solução de (5.2) quaisquer que sejam $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.*

Prova: Já vimos que o problema homogêneo pode ser escrito como:

$$Ty = 0 \qquad \text{com} \qquad T = D^2 + p\, D + q$$

e vimos que T é linear. Portanto:

$$T\,(\alpha\, y_1 + \beta\, y_2) = \alpha\, T\,(y_1) + \beta\, T\,(y_2) = 0,$$

uma vez que y_1 e y_2 são soluções.

5.4 Edo's com Coeficientes Constantes

Vamos, agora, considerar equações linerares de segunda ordem da forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\,\frac{dy}{dx} + a_0\,y = 0, \tag{5.6}$$

onde $a_1,\ a_0 \in \mathbb{R}$.
Isto é, equações diferenciais ordinárias de segunda ordem lineares com coeficientes constantes.
Inicialmente introduzirem a resolução de (5.6). Tentaremos encontrar soluções da forma:

$$y(x) = e^{rx}.$$

Logo, $y'(x) = r\,e^{rx}$ e $y''(x) = r^2\,e^{rx}$. Para que y seja solução de (5.6), devemos ter:

$$\left(r^2 + a_1 r + a_0\right)\,e^{rx} = 0$$

isto é, o expoente r deve ser igual às raízes da equação quadrática em r:

$$r^2 + a_1\,r + a_0 = 0$$

Esta equação é chamada **equação característica** da edo (5.6).
Vamos analisar os possíveis casos das raízes da equação característica.
A solução da equcção característica é:

$$r = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

onde Δ é o discriminante da equação característica.

Se $\boldsymbol{\Delta > 0}$

Então, existem $r_1,\ r_2 \in \mathbb{R}$ tais que $r_1 \neq r_2$, como $y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = e^{r_2 x}$ são li, uma solução geral da edo (5.6) é:

$$\boxed{y(x) = k_1\,e^{r_1 x} + k_2\,e^{r_2 x}.}$$

Exemplo 58. *Considere a edo:*

$$y'' + 2\,y' - 8\,y = 0.$$

A equação característica da edo é:

$$r^2 + 2\,r - 8 = (r-2)\,(r+4) = 0,$$

logo a solução geral da edo é:

$$y(x) = k_1\,e^{2x} + k_2\,e^{-4x}.$$

Se $\boldsymbol{\Delta = 0}$

Então, temos $r = r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ e $r = -\dfrac{a_1}{2}$. Neste caso obtemos $y_1(x) = e^{rx}$. Logo, vamos usar o método de redução de ordem para achar uma segunda solução li. Procuramos soluções do tipo:

$$y(x) = c(x)\, y_1(x).$$

A edo (5.4) é:

$$c''(x) = 0$$

Resolvendo a equação por integração imediata, temos

$$\begin{aligned} c'(x) &= k_1\, x \\ c(x) &= k_1\, x + k_2 \\ c(x) &= x \end{aligned}$$

Como já sabemos que $y_1(x) = e^{rx}$ e $y_2(x) = x\, e^{rx}$ são li, a solução geral da edo (5.6) é:

$$\boxed{y(x) = k_1\, e^{rx} + k_2\, x\, e^{rx}.}$$

Exemplo 59. *Consideremos a edo:*

$$y'' + 4\, y' + 4\, y = 0.$$

A equação característica da edo é: $r^2 + 4\, r + 4 = (r + 2)^2 = 0$; logo, a edo tem como solução geral:

$$y(x) = (k_1 + k_2\, x)\; e^{-2x}.$$

Se $\boldsymbol{\Delta < 0}$

Então, a equação característica tem duas raízes complexas:
$r_1 = \alpha + i\,\beta$ e $r_2 = \alpha - i\,\beta$. Logo, formalmente, vamos tentar uma solução geral da forma:

$$y(x) = k_1\, e^{(\alpha + i\beta)x} + k_2\, e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}\, (k_1\, e^{i\beta x} + k_2\, e^{-i\beta x}).$$

Utilizando a fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x,$$

obtemos,

$$\begin{aligned} e^{r_1 x} &= e^{\alpha x}\, e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\,(\cos(\beta x) + i\ \mathrm{sen}(\beta x)) \\ e^{r_2 x} &= e^{\alpha x}\, e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\,(\cos(\beta x) - i\ \mathrm{sen}(\beta x)) \end{aligned}$$

Sabemos que se consideramos uma combinação linear das funções $e^{r_1 x}$ e $e^{r_1 x}$ esta será solução da edo. Então:

$$\frac{e^{r_1 x} + e^{r_2 x}}{2} = e^{\alpha x}\ \cos(\beta x)$$

$$\frac{e^{r_1 x} - e^{r_2 x}}{2i} = e^{\alpha x}\ \mathrm{sen}(\beta x),$$

Sejam:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\alpha x}\ \cos(\beta x), \\ y_2(x) &= e^{\alpha x}\ \cos(\beta x). \end{aligned}$$

Claramente y_1 e y_2 são li. Portanto, uma solução geral de (5.6) é dada por:

$$\boxed{y(x) = k_1\, e^{\alpha x}\ \cos(\beta x) + k_2\, e^{\alpha x}\ \mathrm{sen}(\beta x).}$$

Exemplo 60. *A edo:*

$$y'' + y = 0.$$

A equação característica é: $r^2 + 1 = 0$, as raízes são complexas $r_1 = i$ e $r_2 = -i$; logo $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, e a edo tem solução geral:

$$y(x) = k_1\ \cos x + k_2\ \mathrm{sen}\, x.$$

Observação 20.

A justificativa da escolha, em princípio, arbitrária da solução $y(x) = e^{rx}$ da edo (5.6), pode ser feita utilizando Álgebra Liner elementar.

5.4.1 Álgebra Linera III

Com a notação de operador diferencial linear de ordem 2, podemos associar à edo de (5.6) o seguinte operador

$$T = D^2 + a_1\, D + a_0,$$

Logo, a equação de (5.6) pode ser representada como $T(y) = 0$.
Uma propriedade interessante destes operadores, estudada em Álgebra Linear elementar, é que algebricamente, estes operadores se comportam como se fossem polinômios em D. Em particular, eles podem ser fatorados como um produto de operadores de ordem 1. Ou seja, podemos cair na resolução de equações de primeira ordem.

Exemplo 61. *Consideremos a edo:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\,y = 0.$$

A edo pode ser escrita como $D^2 - 4)y = 0$ e:

$$(D-2)\,(D+2)y = 0 \quad \text{ou} \quad (D+2)\,(D-2)y \qquad\qquad = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}(D+2)\,y &= D\,y + 2\,y\\ (D-2)\,(D+2)\,y &= (D-2)\,(Dy + 2\,y)\\ &= D^2\,y + 2\,Dy - 2\,Dy - 4\,y = (D^2-4)\,y\end{aligned}$$

Vejamos qual é a vantagem disto. Sejam y_1, y_2 tais que:

$$(D-2)\,y_1 = 0 \quad \text{e} \quad (D+2)\,y_2 = 0$$

logo:

$$\begin{aligned}(D^2-4)\,y_1 &= (D+2)\,(D-2)\,y_1 = (D+2)\,0 = 0,\\ (D^2-4)\,y_2 &= (D-2)\,(D+2)\,y_2 = (D-2)\,0 = 0\end{aligned}$$

Ou seja, podemos achar as soluções de:

$$(D^2-4)\,y = 0,$$

resolvendo:

$$(D-2)\,y = 0 \quad \text{e} \quad (D+2)\,y = 0.$$

As equações de primeira ordem acima correspondem a:

$$(D-2)\,y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\,y,$$

e

$$(D+2)\,y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2\,y$$

cujas soluções, respectivamente, são:

$$y_1(x) = e^{2x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{-2x}.$$

Achamos y_1 e y_2 duas soluções da equação homogênea de segunda ordem. Para que elas formem um conjunto fundamental, basta verificar se elas são li.

$$W(y_1, y_2)(0) = \det \begin{bmatrix} e^{2.0} & e^{-2.0} \\ e^{2.0} & -e^{-2.0} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Portanto,

$$y(x) = k_1\, e^{2x} + k_2\, e^{-2x} \quad \text{é solução geral de} \quad (D^2 - 4)y = 0.$$

O exemplo sugere tentar resolver a equação de segunda ordem:

$$(D^2 + a_1\, D + a_0)\, y = 0. \tag{5.7}$$

Tentaremos decompor o operador diferencial $D^2 + a_1\, D + a_0$ em fatores lineares. Para isto, tal como fazemos com polinômios, precisamos encontrar "suas raízes". Isto é, precisamos determinar as raízes do polinômio:

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$

Esta equação também recebe o nome de equação característica da equação (5.7). De posse das raízes do polinômio acima, determinamos os fatores lineares e temos que resolver duas equações de primeira ordem tal como no exemplo.

A seguir estudaremos uma classe especial de equações homogêneas lineares de ordem 2 que não têm coeficientes constantes.

5.5 Equação de Euler-Cauchy Homogênea

Uma edo é de Euler-Cauchy de ordem 2 se é da forma:

$$a_2\,x^2\,y'' + a_1\,x\,y' + a_0\,y = 0, \tag{5.8}$$

tal que $a_2 \neq 0$ e $a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$.
Ela é também chamada de equação equidimensional pois o expoente de cada coeficiente é igual à ordem da derivada. Isso implica que com a substituição:

$$y(x) = x^r, \quad x > 0,$$

produzirá termos do mesmo graue teremos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= r\,x^{r-1} \\ y''(x) &= r\,(r-1)\,x^{r-2}; \end{aligned}$$

logo,

$$a_2\,x^2\,y'' + a_1\,x\,y' + a_0\,y = x^r\,\left(a_2\,r\,(r-1) + a_1\,r + a_0\right) = 0$$

Portanto, basta analisarmos as raízes do polinômio:

$$a_2\,r^2 + (a_1 - a_2)\,r + a_0.$$

Seja $\Delta = -(a_1 - a_2)^2 - 4\,a_2\,a_0$ o discriminante da equação de segundo grau. Como antes temos 3 possibilidades:

Se $\boldsymbol{\Delta} > 0$

Logo, temos $r_1,\ r_2 \in \mathbb{R}$ tais que $r_1 \neq r_2$. Uma solução geral de (5.8) é:

$$y(x) = k_1\,x^{r_1} + k_2\,x^{r_2}$$

Se $\boldsymbol{\Delta} = 0$

Logo, temos raízes reais e iguais $r = r_1 = r_2$. Utilizando o método de redução de ordem, vamos achar uma segunda solução da forma:

$$\begin{aligned} y_2 &= c(x)\,x^r \\ y_2^{'} &= x^r\,c' + r\,x^{r-1}\,c \\ y_2^{''} &= x^r\,c'' + 2\,r\,x^{r-1}\,c' + r\,(r-1)x^{r-2}\,c. \end{aligned}$$

Portanto:

$$a_2\, x^2\, y_2'' + a_1\, x\, y_2' + a_0\, y_2 = a_2\, x^{r+2}\, c'' + c'\, x^{r+1}\, (2\, a_2\, r + a_1) = 0.$$

Fazendo a mudança de variável e lembrando que $r = \dfrac{a_2 - a_1}{2a_2}$

$$\begin{aligned}
&c' = p\\
&a_2\, x^{r+2}\, p' + p\, x^{r+1}\, a_2 = 0\\
&\frac{dp}{p} = -\frac{x^{r+1}\, a_2}{a_2\, x^{r+2}}\, dx = -\frac{1}{x} dx\\
&\ln|p| = -\ln x\\
&c' = p = \frac{1}{x}\\
&c(x) = \ln x\\
&y_2(x) = c(x)\, x^r\, x^r\, \ln x
\end{aligned}$$

Portanto, uma solução geral de (5.8) é:

$$y(x) = (k_1 + k_2\, \ln x)\; x^r$$

Se $\Delta < 0$

Logo, temos raízes complexas $r_1 = a + bi$ e $r_2 = a - bi$.
Tal como no caso das equações de coeficientes constantes, usamos a fórmula de Euler para obter

$$x^{a \pm bi} = e^{(a \pm bi) \ln x} = e^{a \ln x} e^{\pm bi \ln x} = x^a\, (\cos(b \ln x) \pm i\, \operatorname{sen}(b \ln x))\,.$$

Podemos verificar que as partes real e imaginária são soluções linearmente independentes. Portanto, uma solução geral de (5.8) e:

$$y(x) = x^a\, \left(k_1\, \cos(b \ln x) + k_2\, \operatorname{sen}(b \ln x)\right).$$

Suponhamos que tenhamos obtido, por este método, uma solução $y(t)$ para $x > 0$.
Observemos agora que, se $x < 0$, obtemos resultados análogos.

Teorema 8. *Consideremos a edo de Euler-Cauchy:*

$$a_2\, x^2\, y'' + a_1\, x\, y' + a_0\, y = 0, \quad x \neq 0.$$

e a equação característica:

$$a_2\, r^2 + (a_1 - a_2)\, r + a_0. \tag{5.9}$$

Então:

1. A edo (5.9) tem raízes reais e distintas $r_1 \neq r_2$. A solução geral da edo é:

$$y(x) = k_1|x|^{r_1} + k_2|x|^{r_2}.$$

2. A edo (5.9) tem raízes repetidas $r_1 = r_2$. A solução geral da edo é:

$$y(x) = (k_1 + k_2 \, \ln|x|) \, |x|^{r_1}.$$

3. A edo (5.9) tem raízes complexas $r_1 = a + bi$ e $r_2 = a - bi$. A solução geral da edo é:

$$y(x) = |x|^a \, (k_1 \, \cos(b \ln|x|) + k_2 \, \text{sen}(b \ln|x|)).$$

Exemplo 62. *Considere a edo:*

$$x^2 \, \frac{d^2y}{dx^2} + 5\,x\,\frac{dy}{dx} + 4y = 0, \qquad x \neq 0$$

Procuramos uma solução da forma $y(x) = x^r,\ x > 0$. O polinômio característico é:

$$r^2 + 4\,r + 4 = (r+2)^2 = 0.$$

Logo, uma solução geral é:

$$y(x) = k_1\,x^{-2} + k_2 \, \ln(x)\,x^{-2}, \quad x \neq 0.$$

Exemplo 63. *Considere a edo:*

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{10}{4} y = 0, \qquad x \neq 0$$

Procuramos uma solução da forma $y(x) = x^r,\ x > 0$. O polinômio característico é:

$$r^2 - r + \frac{10}{4} = 0.$$

As raízes são:

$$r = \frac{1 \pm 3i}{2}.$$

Logo, uma solução geral é:

$$y(x) = |x|^{\frac{1}{2}} \left(k_1 \, \cos\left(\frac{3}{2} \ln|x|\right) + k_2 \, \text{sen}\left(\frac{3}{2} \ln|x|\right)\right), \quad x \neq 0$$

5.6 Edos não Homogêneas

Vamos, agora, voltar às equações não-homogêneas. Queremos resolver

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = r(x).$$

Já vimos que uma solução geral é dada por:

$$y(x) = y_p + y_h$$

e y_h é uma solução geral do problema homogêneo:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

Veremos agora um método que consiste em obter uma solução particular para um problema não-homogêneo a partir da solução geral do homogêneo.

5.6.1 Método de Variação de Parâmetros

Seja

$$y_h(x) = k_1\, y_1(x) + k_2\, y_2(x)$$

uma solução geral do problema homogêneo:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Vamos tentar encontra uma solução particular do problema não-homogêneo da forma:

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x).$$

Observamos que esta é uma idéia similar à que utilizamos para obter uma segunda solução linearmente independente quando tínhamos raízes repetidas. Se queremos que y_p seja uma solução particular, devemos ter:

$$T(y_p) = r.$$

Como temos duas funções a determinar $c_1(x)$ e $c_2(x)$, estamos livres para impor mais uma condição adicional. Vamos impor uma condição que simplifique nossa resolução. Calculemos as derivadas de y_p

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x))' \\ &= c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x) \end{aligned}$$

Vamos simplificar esta expressão, impondo:

$$c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0$$

Desse modo,

$$y_p'(x) = c_1(x)\, y_1'(x) + c_2(x)\, y_2'(x),$$

e

$$y_p''(x) = c_1'(x)\, y_1'(x) + c_1(x)\, y_1''(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) + c_2(x)\, y_2''(x)$$

Lembrando que y_1 e y_2 são soluções do problema homogêneo, temos:

$$y_1'' = -p\, y_1' - q\, y_1 \qquad \text{e} \qquad y_2'' = -p\, y_2' - q\, y_2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y_p'' &= c_1'\, y_1' + c_1\, (-p\, y_1' - q\, y_1) + c_2'\, y_2' + c_2\, (-p\, y_2' - q\, y_2) \\ &= (c_1'\, y_1' + c_2'\, y_2') - p\, (c_1\, y_1' + c_2\, y_2') - q\, (c_1\, y_1 + c_2\, y_2) \\ &= (c_1'\, y_1' + c_2'\, y_2') - p\, y_p' - q\, y_p. \end{aligned}$$

Como queremos $T(y_p) = r$:

$$y_p'' = r - p\, y_p' - q\, y_p,$$

devemos ter:

$$c_1'\, y_1' + c_2'\, y_2' = r.$$

Portanto, devemos resolver o sistema

$$c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0 \tag{5.10}$$

$$c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) = r \tag{5.11}$$

Observe que o determinante da matriz associada a este sistema é:

$$W(y_1, y_2) \neq 0.$$

Logo, resolveremos o sistema e determinaremos expressões para as derivadas de c_1 e c_2; integrando estas expressões e obtemos os coeficientes da solução particular.

Exemplo 64. *Considere a edo:*

$$y'' - 3\, y' + 2\, y = e^x \operatorname{sen} x.$$

i) Vamos resolver o problema homogêneo:

$$y'' - 3\, y' + 2\, y = 0,$$

o polinômio associado a edo é: $r^2 - 3\,r + 2 = (r-1)(r-2)$; logo, a solução geral é:

$$y_h = k_1\,e^x + k_2\,e^{2x}.$$

ii) Vamos achar uma solução particular:

$$y_p = c_1(x)\,e^x + c_2(x)\,e^{2x}.$$

Temos:

$$y_p' = c_1'(x)\,e^x + c_1(x)\,e^x + c_2'(x)\,e^{2x} + 2\,c_2(x)\,e^{2x},$$

vamos impor que:

$$c_1'(x)\,e^x + c_2'(x)\,e^{2x} = 0$$

logo

$$\begin{aligned} y_p' &= c_1(x)\,e^x + 2\,c_2(x)\,e^{2x} \\ y_p'' &= c_1'(x)\,e^x + c_1(x)\,e^x + 2\,c_2'(x)\,e^{2x} + 4\,c_2(x)\,e^{2x}. \end{aligned}$$

Queremos que:

$$\begin{aligned} y_p'' &= e^x\,\operatorname{sen} x - y_p'' + 3\,y_p' - 2\,y_p \\ &= e^x\,\operatorname{sen} x - y_p'' + 3\,\big(c_1(x)\,e^x + 2\,c_2(x)\,e^{2x}\big) - 2\,\big(c_1(x)\,e^x + c_2(x\,)e^{2x}\big) \\ &= e^x\,\operatorname{sen} x + c_1(x)\,e^x + 4\,c_2(x)\,e^{2x} \end{aligned}$$

Logo, comparando os termos das duas expressões da derivada segunda de y_p, devemos ter:

$$c_1'(x)\,e^x + 2\,c_2'(x)\,e^{2x} = e^x\,\operatorname{sen} x$$

Portanto, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} c_1'(x)\,e^x + c_2'(x)\,e^{2x} = 0 \\ c_1'(x)\,e^x + 2c_2'(x)\,e^{2x} = e^x\,\operatorname{sen} x. \end{cases}$$

Isto é, multiplicando a primeira equação por -2 e somando as equações

$$\begin{aligned} -c_1'(x)e^x &= e^x \operatorname{sen} x \\ c_1'(x) &= -\operatorname{sen} x \\ c_2'(x) &= e^{-2x}\,(c_1'(x)\,e^x) = -e^{-x}\,\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \operatorname{sen} x\,dx = \cos x \\ c_2(x) &= -\int e^{-x}\,\operatorname{sen} x\,dx, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x\,dx &= -e^{-x}\,\cos x - \int e^{-x}\,\cos x\,dx\\ &= -e^{-x}\,\cos x - e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x - \int e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\,e^{-x}\,(\mathrm{sen}\,x + \cos x)\,.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}y_p(x) &= c_1(x)\,e^{x} + c_2(x)\,e^{2x}\\ &= e^{x}\,\cos x - \frac{1}{2}\,e^{-x}\,(\mathrm{sen}\,x + \cos x)\,e^{2x}\\ &= \frac{e^{x}}{2}\,(\cos x - \mathrm{sen}\,x)\end{aligned}$$

é uma solução particular de $y'' - 3\,y' + 2\,y = e^{x}\,\mathrm{sen}\,x$, e uma solução geral é dada por:

$$y(x) = y_p(x) + k_1\,e^{x} + k_2\,e^{2x} = \frac{e^{x}}{2}\,(\cos x - \mathrm{sen}\,x) + k_1\,e^{x} + k_2\,e^{2x}$$

Exemplo 65. *Considere a edo:*

$$y'' + y = \sec x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

i) Vamos resolver o problema homogêneo:

$$y'' + y = 0,$$

o polinômio associado a edo de Euler é: $r^2 + 1$; logo, a solução geral é:

$$y_h = k_1\,\cos x + k_2\,\mathrm{sen}\,x.$$

ii) Vamos achar uma solução particular:

$$y_p = c_1(x)\,\cos x + c_2(x)\,\mathrm{sen}\,x.$$

Como antes, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} c_1'(x)\,\mathrm{sen}\,x + c_2'(x)\,\cos x = 0\\ c_1'(x)\,\cos x - c_2'(x)\,\mathrm{sen}\,x = \sec x.\end{cases}$$

Por outro lado, $W(y_1, y_2)(x) = 1$.

$$c_1'(x) = 1$$
$$c_2'(x) = \operatorname{tg} x.$$

Portanto:

$$c_1(x) = \int dx = x$$
$$c_2(x) = -\int \tan x \, dx = \ln(\cos x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x)\, \cos x + c_2(x)\, \operatorname{sen} x \\ &= x\, \operatorname{sen} x + \cos x\, \ln(\cos x) \end{aligned}$$

é uma solução particular da edo, e uma solução geral é dada por:

$$y(x) = k_1\, \cos x + k_2\, \operatorname{sen} x + x\, \operatorname{sen} x + \cos x\, \ln(\cos x).$$

Exemplo 66. *Considere a edo:*

$$x^2\, y'' - 3\, x\, y' + 4\, y = x^4, \quad x > 0.$$

i) Vamos resolver o problema homogêneo:

$$x^2\, y'' - 3\, x\, y' + 4\, y = 0,$$

o polinômio associado a edo de Euler é: $r^2 - 4\, r + 4 = (r-2)^2$; logo, a solução geral é:

$$y_h = k_1\, x^2 + k_2\, \ln(x)\, x^2.$$

ii) Vamos achar uma solução particular:

$$y_p = c_1(x)\, x^2 + c_2(x)\, \ln(x)\, x^2.$$

Primeramente escrevemos a edo da seguinte forma:

$$y'' - \frac{3}{x}\, y' + \frac{4}{x^2}\, y = x^2.$$

Como antes, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} c_1'(x)\, x^2 + c_2'(x)\, \ln(x)\, x^2 = 0 \\ c_1'(x)\, 2\, x + c_2'(x)\, x\, (2 + \ln(x)) = x^2. \end{cases}$$

Por outro lado, $W(y_1, y_2)(x) = x^3$.

$$c_1'(x) = -x\,\ln(x)$$
$$c_2'(x) = x.$$

Portanto:

$$c_1(x) = -\int x\,\ln(x)\,dx = \frac{x^2 - x^2\,\ln(x)}{2}$$
$$c_2(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x)\,x^2 + c_2(x)\,x^2\,\ln(x) \\ &= \frac{x^4}{2} \end{aligned}$$

é uma solução particular da edo, e uma solução geral é dada por:

$$y(x) = k_1\,x^2 + k_2\,\ln(x)\,x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

5.7 Método dos Coeficientes Indeterminados

Vamos agora estudar um método de obtenção de uma solução particular da equação não-homogênea que é mais simples do que o de variação de parâmetros porém de aplicação mais restrita. Trata-se do método dos coeficientes indeterminados.
Estamos interessados em resolver

$$y'' + a_1\,y' + a_0\,y = r(x).$$

Tentaremos encontrar uma solução particular dando um palpite quanto à sua forma baseados na expressão da função $r = r(x)$.

Exemplo 67. *Considere a edo:*

$$y'' - y' + 5\,y = 3.$$

Sabemos resolver a equação homogênea associada, mas não vale a pena empregar o método de variação de parâmetros pois é bastante simples encontrarmos uma solução particular constante.Visto que sendo constante, suas derivadas se anulam, precisamos escolhê-la de modo que ao multiplicá-la por 5 obtenhamos 3. Isto é,

$$y_p(x) = \frac{3}{5}.$$

Exemplo 68. *Considere a edo:*

$$y'' - 3\,y' - 4\,y = 3\,e^{2x}.$$

Podemos tentar uma solução particular da forma $y_p(x) = A\,e^{2x}$, uma vez que as derivadas de uma função deste tipo seriam múltiplos de e^{2x}. Para que y_p seja solução, devemos ter

$$\begin{aligned} y_p'' - 3\,y_p' - 4\,y_p &= 4\,A\,e^{2x} - 6\,A\,e^{2x} - 4\,A\,e^{2x} = 3\,e^{2x} \\ -6\,A &= 3 \\ y_p(x) &= -\frac{e^{2x}}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 69. *Considere a edo:*

$$y'' - 3\,y' - 4\,y = 2\,\operatorname{sen} x.$$

Podemos tentar uma solução particular da forma $y_p(x) = A\,\operatorname{sen} x$, uma vez que combinações lineares das derivadas de uma função deste tipo podem resultar em um múltiplo de $\operatorname{sen} x$. Para que y_p seja solução, devemos ter:

$$\begin{aligned} &y_p'' - 3\,y_p' - 4\,y_p = -A\,\operatorname{sen} x - 3\,A\,\cos x - 4\,\operatorname{sen} x = 2\,\operatorname{sen} x \\ &(2 + 5\,A)\,\operatorname{sen} x + 3\,A\,\cos x = 0. \end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são funções li, tal equação se anulará para todo x, somente se os coeficientes forem nulos:

$$\begin{aligned} 2 + 5\,A &= 0 \\ 3\,A &= 0; \end{aligned}$$

logo, obtemos $y_p(x) = 0$ e tal solução não nos interessa, vamos tentar:

$$y_p(x) = A\,\operatorname{sen} x + B\,\cos x;$$

então,

$$\begin{aligned} &y_p'' - 3\,y_p' - 4\,y_p \\ &= (-A\,\operatorname{sen} x - B\,\cos x) - 3\,(A\,\cos x - B\,\operatorname{sen} x) - 4\,(A\,\operatorname{sen} x + B\,\cos x) \\ &= 2\,\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

de onde obtemos: $(2+5\,A-3\,B)\,\operatorname{sen} x+(3\,A+5\,B)\,\cos x=0$, e:

$$\begin{cases} 5\,A-3\,B &= -2 \\ 3\,A+5\,B &= 0; \end{cases}$$

logo, $y_p(x)=-\dfrac{5}{17}\,\operatorname{sen} x+\dfrac{3}{17}\,\cos x$.

Exemplo 70. *Considere a edo:*

$$y''-3\,y'-4\,y=-8\,e^x\,\cos 2x.$$

Podemos tentar uma solução particular da forma:

$$y_p(x)=A\,e^x\,\cos 2\,x+B\,e^x\,\operatorname{sen} 2x,$$

uma vez que combinações lineares das derivadas de uma função deste tipo podem resultar em um múltiplo de $e^x\,\cos 2\,x$. Vamos calcular as derivadas de y_p:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (A+2\,B)\,e^x \cos 2x+(B-2\,A)\,e^x \operatorname{sen} 2x \\ y_p''(x) &= (A+2\,B+2\,B-4\,A)\,e^x \cos 2x+(B-2\,A-2\,A-4\,B)\,e^x \operatorname{sen} 2x \\ &= (-3\,A+4\,B)\,e^x\,\cos 2x+(-3\,B-4\,A)\,e^x\,\operatorname{sen} 2x. \end{aligned}$$

Para que y_p seja solução, devemos ter:

$$\begin{aligned} & y_p''-3\,y_p'-4\,y_p \\ & =(-10\,A-2\,B)\,e^x\,\cos 2x+(2\,A-10\,B)e^x\,\operatorname{sen} 2x \\ & =-8\,e^x\,\cos 2x; \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} 10\,A+2\,B &= 8 \\ 2\,A-10\,B &= 0. \end{aligned}$$

de onde obtemos $y_p(x)=\dfrac{10}{13}\,e^x\,\cos 2x+\dfrac{2}{13}\,e^x\,\operatorname{sen} 2x$

Vejamos agora um exemplo em que a função $r(x)$ é dada por uma soma

Exemplo 71. *Considere a edo:*

$$y''-3\,y'-4\,y=3\,e^{2x}+2\,\operatorname{sen} x-8\,e^x \cos 2x.$$

Observemos que se conhecermos soluções dos problemas

$$\begin{aligned}
y_1'' - 3\,y_1' - 4\,y_1 &= 3\,e^{2x} \\
y_2'' - 3\,y_2' - 4\,y_2 &= 2\ \operatorname{sen} x \\
y_3'' - 3\,y_3' - 4\,y_3 &= -8\,e^{x}\cos 2x;
\end{aligned}$$

então, temos uma solução particular da edo dada por

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x).$$

Obtivemos nos exemplos anteriores

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= -\frac{1}{2}\,e^{2x} \\
y_2(x) &= -\frac{5}{17}\ \operatorname{sen} x + \frac{3}{17}\ \cos x \\
y_3(x) &= \frac{10}{13}\,e^{x}\ \cos 2x + \frac{2}{13}\,e^{x}\ \operatorname{sen} 2x.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\,e^{2x} - \frac{5}{17}\ \operatorname{sen} x + \frac{3}{17}\ \cos x + \frac{10}{13}\,e^{x}\ \cos 2x + \frac{2}{13}\,e^{x}\ \operatorname{sen} 2x$$

é uma solução particular da edo.

Vemos nestes exemplos que para determinarmos uma solução particular, basta determinar certas constantes. Vamos tentar, a seguir, resumir alguns casos em que é simples aplicar o método dos coeficientes indeterminados. Antes de prosseguir, vejamos mais um exemplo.

Exemplo 72. *Consider a edo:*

$$y'' + 4\,y = 3\ \cos 2x.$$

Podemos tentar uma solução particular da forma:

$$y_p(x) = A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x,$$

uma vez que combinações lineares das derivadas de uma função deste tipo podem resultar em um múltiplo de $\cos 2x$. Para que y_p seja solução, devemos ter

$$y_p'' + 4\,y_p = (-4\,A + 4\,A)\ \cos 2x + (-4\,B + 4\,B)\ \operatorname{sen} 2x = 3\cos 2x$$

e vemos que não há escolhas de A e B que nos dêem uma solução particular na forma $y_p(x) = A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x$. Na verdade a substituição acima nos mostrou que soluções deste tipo na verdade são soluções do problema homogêneo associado o que pode ser verificado resolvendo a equação característica. De fato, a equação característica da edo é:

$$\begin{aligned} r^2 + 4 &= 0 \\ r_1 &= 2i \quad \text{e} \\ r_2 &= 2i \\ y(x) &= k_1 \, \cos 2x + k_2 \, \operatorname{sen} 2x. \end{aligned}$$

Qual é a diferença deste exemplo com os demais. Por que este problema não ocorreu antes? Como generalizar a aplicação do método dos coeficientes indeterminados, excluindo casos deste tipo?

5.7.1 Determinação dos Coeficientes

Queremos determinar uma solução particular da edo:

$$y'' + a_1 \, y' + a_0 \, y = r(x).$$

Vamos resumir a aplicação do método dos Coeficientes Indeterminados quando $r(x)$ é uma combinação linear de produtos (finitos) de funções do tipo:

1. Um polinômio $P_n(x)$, de grau n.

2. Uma função exponencial e^{kx}.

3. Combinações de $\cos kx$ ou $\operatorname{sen} kx$.

Vimos, através de um exemplo, que teríamos problemas se $r(x)$ contivesse termos tais que eles ou algumas de suas derivadas fosse linearmente dependente com uma base do espaço solução da equação homogênea associada. No que segue, veremos como tratar também estes casos.

Regra 1: Se $r(x) = P_n(x)$ é o polinômio de grau n; então:

$$y_p(x) = x^h (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0),$$

onde, h é a ordem da menor derivada presente na edo.

Exemplo 73. *Considere a edo:*

$$y'' - 4\, y' = x^2 + x.$$

Vamos resolver o problema homogêneo associado:

$$\begin{aligned}
&y'' - 4\,y' = 0\\
&r^2 - 4\,r = 0, \quad \text{eq. carac.}\\
&r_1 = 0, \quad r_2 = 4.
\end{aligned}$$

Então, $y_h(x) = k_1 \, + k_2\, e^{4x}$.
Como $r(x) = x^2 + x$, estamos nas condições da Regra 1. Como $h = 1$ e vamos tentar uma solução particular da forma:

$$y_p(x) = x(A\,x^2 + B\,x + C).$$

Derivando:

$$\begin{aligned}
&y_p'(x) = 3\,A\,x^2 + 2\,B\,x + C\\
&y_p(x)'' = 6\,A\,x + 2\,B.
\end{aligned}$$

Para que y_p seja solução da edo, devemos ter:

$$y_p'' - 4\,y_p' = -12\,A\,x^2 + (6\,A - 8\,B)\,x + (2\,B - 4\,C) = x^2 + x.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
-\,12\,A &= 1\\
6\,A - 8\,B &= 1\\
2\,B - 4\,C &= 0,
\end{aligned}$$

de onde obtemos: $A = -\dfrac{1}{12}$, $B = -\dfrac{3}{16}$ e $C = -\dfrac{3}{32}$; então:

$$y_p(x) = -\frac{x^3}{12} - \frac{3\,x^2}{16} - \frac{3\,x}{32}.$$

A edo tem uma solução geral:

$$y(x) = k_1 \, + k_2\, e^{4x} + -\frac{x^3}{12} - \frac{3\,x^2}{16} - \frac{3\,x}{32}.$$

Regra 2: Se $r(x) = e^{kx}$; então:

$$y_p(x) = A\,x^h\,e^{kx},$$

onde, h é o grau de multiplicidade de k como raiz da equação característica da edo.

Exemplo 74. *Considere a edo:*

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 2\,e^{2x}.$$

Vamos resolver o problema homogêneo associado:

$$\begin{aligned}
&y'' - 3\,y' + 2\,y = 0\\
&r^2 - 3\,r + 2 = 0, \quad \text{eq. carac.}\\
&r_1 = 1, \quad r_2 = 2.
\end{aligned}$$

Então, $y_h(x) = k_1\,e^x + k_2\,e^{2x}$.
Como $r(x) = 2\,e^{2x}$ e $k = 2$ é raiz de multiplicidade 1 da equação característica, estamos nas condições da Regra 2. Como $h = 1$ e vamos tentar uma solução particular da forma:

$$y_p(x) = A\,x\,e^{2x}.$$

Então, derivando:

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= \left(e^{2x} + 2\,x\,e^{2x}\right)\,A\\
y_p(x)'' &= \left(4\,e^{2x} + 4\,x\,e^{2x}\right)\,A.
\end{aligned}$$

Para que y_p seja solução da edo, devemos ter:

$$y_p'' - 3\,y_p' + 2\,y_p = A\,e^{2x} = 2\,e^{2x}.$$

Logo: $A = 2$, então:

$$y_p(x) = 2\,x\,e^{2x}.$$

A edo tem uma solução geral:

$$y(x) = k_1\;e^x + k_2\,e^{2x} + 2\,x\,e^{2x}.$$

Regra 3: Se $r = r(x)$ é da forma $\operatorname{sen} kx$ ou $\cos kx$; então:

$$y_p(x) = x^h\,(A\,\cos kx + B\,\operatorname{sen} kx)\,,$$

onde, h é o grau de multiplicidade de $i\,k$ como raiz da equação característica da edo.

Exemplo 75. *Considere a edo:*

$$y'' + y = \cos x.$$

Vamos resolver o problema homogêneo associado:

$$\begin{aligned} &y'' + y = 0 \\ &r^2 + 1 = 0, \quad \text{eq. carac.} \\ &r_1 = i, \quad r_2 = -i. \end{aligned}$$

Então, $y_h(x) = k_1 \cos x + k_2 \operatorname{sen} x$.
Como $i\,k = i$ é raiz de multiplicidade 1 da equação característica, estamos nas condições da Regra 3. Como $h = 1$ e vamos tentar uma solução particular da forma:

$$y_p(x) = x\,(A \cos x + B \operatorname{sen} x).$$

Então, derivando:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \cos x\,(A + B\,x) + \operatorname{sen} x\,(B - A\,x) \\ y_p(x)'' &= -\operatorname{sen} x\,(2\,A + B\,x) + \cos x\,(2\,B - A\,x)\,. \end{aligned}$$

Para que y_p seja solução da edo, devemos ter:

$$y_p'' + y_p = -2\,A \operatorname{sen} x + 2\,B \cos x = \cos x.$$

Logo: $A = 0$ e $B = \dfrac{1}{2}$, então:

$$y_p(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{2}.$$

A edo tem uma solução geral:

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \operatorname{sen} x + \frac{x \operatorname{sen} x}{2}$$

5.8 Exercícios

1. Determine a solução geral das edo's:

a) $y'' = a^2 y$.

b) $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$.

c) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} 2x$.

d) $y'' = \dfrac{1}{2y'}$.

e) $\dfrac{d^2y}{dy^2} - 4 = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$.

f) $xy'' = y'$.

g) $xy'' + y' = 4x$.

h) $yy'' = 3(y')^2$.

i) $y^3 y'' = 1$.

j) $yy'' + (y')^2 = 0$.

k) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

l) $y'' = \dfrac{1}{a}\sqrt{1 + (y')^2}$.

2. Encontre as soluções particulares das equações que satisfazem às condições iniciais $y(0) = -1$ e $y'(0) = 0$.

a) $y'' = e^{2x} + \cos 2x$

b) $xy'' - y' = x^2 e^x$

3. Resolva os seguintes problemas de valor inicial

a) $\begin{cases} y'y'' - x = 0 \\ y(1) = 2, \\ y'(1) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'y'' = 2 \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy'' + y' = 1, x > 0 \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} xy'' - y' = x^2 e^x, \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$

e) $y'y'' = 2, \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 3$

f) $\begin{cases} y'y'' = 4x, \\ y(1) = 5, \\ y'(1) = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y'' + 4y' = 5y = 35e^{-4x}, \\ y(0) = -3, \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \omega t, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

4. Encontre um segunda solução linearmente independente da solução dada:

a) $xy'' - y' + 4x^3 y = 0, \quad x > 0, \quad y_1(x) = \operatorname{sen} x^2$

b) $(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1, \quad y_1(x) = e^x$

c) $(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0, \quad y_1(x) = x+1$

d) $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0, \quad y_1(x) = e^{x^2}$

e) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)y = 0, \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x$

5. Determine a solução geral de:

a) $y'' + 5y' + 4y = 0$

b) $y'' - 3y + y = 0$

c) $y'' + y' + y = 0$

d) $y'' + 2y' + 3y = 0$

e) $y'' - 6y' + 9y = 0$

f) $y'' - y = 0$

g) $y'' + 4y = 0$

h) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $x > 0$

i) $x^2y'' + 2xy' + 2y = 0$, $x > 0$

j) $x^2y'' + 5xy' - 5y = 0$, $x > 0$

6. Encontre uma equação diferencial linear com coeficientes constantes cuja solução geral seja:

a) $k_1e^{-x} + k_2e^{2x}$

b) $(k_1 + k_2x)e^{-3x}$

c) $k_1e^x \operatorname{sen} 2x + k_2e^x \cos 2x$

7. Três soluções de uma certa equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea são: $\phi_1(x) = x^2$, $\phi_2(x) = x^2 + e^{2x}$, $\phi_3(x) = 1 + x^2 + 2e^{2x}$. Determine a solução geral dessa equação.

8. Três soluções de uma certa equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea $T(y) = g(x)$ são: $\phi_1(x) = 3e^x + e^{x^2}$, $\phi_2(x) = 7e^x + e^{x^2}$, $\phi_3(x) = 5e^x + e^{-x^3} + e^{x^2}$. Determine a solução do problema de valor inicial $T(y) = g(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

9. Se o Wronskiano de $f(x)$ e $g(x)$ for $3e^{4x}$ e se $f(x) = e^{2x}$, ache $g(x)$.

10. Se a, b e c forem constantes positivas, mostre que todas as soluções da equação $ay'' + by' + cy = 0$ se aproximam de zero quando $x \to \infty$

11. Uma equação da forma

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \qquad x > 0$$

onde α e β são constantes reais, é chamada de equação de Euler. Mostre que a mudança de variável $x = e^z$ transforma uma equação de Euler em uma equação de coeficientes constantes.

12. (i) Verifique que $y_1(x) = 1$ e $y_2(x) = \sqrt{x}$ são soluções da equação diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$ para $x > 0$. A combinação linear $k_1 + k_2\sqrt{x}$ também é solução desta equação? Comente sua resposta.

    (ii) É possível que $y(x) = \operatorname{sen} x^2$ seja uma solução da equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, com $p(x)$ e $q(x)$ funções contínuas em um intervalo que contenha $x = 0$? Explique sua resposta.

13. Sejam $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea, onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas em um intervalo aberto I, e $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções.

    (i) Prove que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem nulas em um mesmo ponto de I, então não podem constituir um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.

    (ii) Prove que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tiverem máximos ou mínimos em um mesmo ponto de I, então não podem constituir um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.

    (iii) Prove que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tiverem um ponto de inflexão em comum no ponto $x_0 \in I$ e $p(x_0) \neq 0$ ou $q(x_0) \neq 0$, então $y_1(x)$ e $y_2(x)$ não podem constituir um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.

5.9 Aplicações

5.9.1 Sistema massa-mola

Já vimos, usando a Lei de Hooke, que uma equação que descreve o movimento de um corpo preso a uma mola é dada por:

$$m\,x'' = m\,a = F = -k\,x, \quad k > 0.$$

Se considerarmos a existência de uma força de amortecimento ou resitência agindo contra o movimento do corpo proporcional à velocidade, temos:

$$m\,x'' = m\,a = F = -k\,x - \gamma\,x', \quad k, \gamma > 0.$$

Podemos ainda ter a atuação de uma força externa $F(t)$. Neste caso, temos

$$m\,x'' = m\,a = F = -k\,x - \gamma\,x' + F(t), \quad k, \gamma > 0.$$

Vemos então que a equação de movimento da massa é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$m\,x'' + \gamma\,x' + k\,x = F(t), \quad m, k, \gamma > 0.$$

Vamos analisar este movimento de acordo com os tipos de força que estejam atuando. Na ausência de forças externas e de amortecimento, temos as

5.9.2 Oscilações livres não-amortecidas

$$m\,x'' + k\,x = 0, \quad m, k > 0.$$

A equação característica é:

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0$$
$$r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \pm i\,\omega_0,$$

e uma solução geral é dada por:

$$x(t) = k_1\,\cos\omega_0 t + k_2\,\operatorname{sen}\omega_0 t.$$

Para analisar o movimento descrito por esta solução, consideremos constantes $A > 0$ e $\delta \in [0, 2\pi]$ tais que

$$A = \sqrt{k_1^2 + k_2^2},$$
$$\cos\delta = \frac{k_1}{A},$$
$$\operatorname{sen}\delta = \frac{k_2}{A}.$$

Observemos que podemos reescrever

$$\begin{aligned} x(t) &= A\,\cos\delta\cos\omega_0 t + A\,\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\omega_0 t \\ &= A\cos(-\delta)\cos\omega_0 t - A\operatorname{sen}(-\delta)\operatorname{sen}\omega_0 t \\ &= A\,\cos(\omega_0 t - \delta) \end{aligned}$$

Esta expressão nos diz que a massa oscila em torno de sua posição de equilíbrio $x = 0$ com amplitude constante igual a A. Tal fato é devido à ausência de amortecimento. Este movimento é chamado de Movimento Harmônico Simples.

Na ausência somente de forças externas, temos as

5.9.3 Oscilações livres amortecidas

$$m\,x'' + \gamma\,y' + k\,x = 0, \quad m, k, \gamma > 0.$$

A equação característica é:

$$\begin{aligned} r^2 + \frac{\gamma}{m} r + \frac{k}{m} &= 0, \\ r &= \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} \end{aligned}$$

Sela $\Delta = \gamma^2 - 4\,m\,k > 0$, deveremos considerar 3 casos:

1. Oscilações livres superamortecidas: $\Delta > 0$.

   Como γ é relativamente grande, estamos lidando com uma forte resistência comparada a uma mola relativamente fraca ou a uma massa muito pequena. Uma solução geral é da forma:

   $$x(t) = k_1\,e^{r_1 t} + k_2\,e^{r_2 t},$$

   com

   $$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2m}, \\ r_2 & \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2m}, \\ \Delta &> 0, \\ r_1,\, r_2 &< 0. \end{aligned}$$

   Portanto, se $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ quando $t \to \infty$. Nos exercícios, veremos que isto ocorre sem que o corpo oscile em torno de sua posição de equlíbrio $x = 0$.

2. Oscilações livres criticamente amortecidas: $\Delta = 0$

   Neste caso, as raízes são repetidas:
$$\begin{aligned} &r_1 = r_2 = -\frac{\gamma}{2m}, \\ &m, \gamma > 0, \\ &r_1 < 0 \end{aligned}$$
   e uma solução geral é da forma
$$x(t) = \big(k_1 + k_2\,t\big)\, e^{-\frac{\gamma}{2m}t}.$$
   Como $e^{-\frac{\gamma}{2m}t} > 0$ e $k_1 + k_2\,t$ intersecta o eixo x no máximo uma vez, vemos que o corpo passa por sua posição de equlíbrio $x = 0$ no máximo uma vez. Além disso, se $x \to 0$ quando $t \to \infty$. Ainda que o comportamento do movimento, neste caso, se pareça com o do superamortecido, vemos que qualquer pequeno decréscimo na constante γ nos leva ao próximo caso.

3. Oscilações livres subamortecidas: $\Delta < 0$

   A equação característica tem raízes complexas, uma solução geral é dada por:
$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\,\big(k_1\, \cos \omega_1 t + k_2\, \operatorname{sen} \omega_1 t\big)$$
   com
$$\omega_1 = \frac{\sqrt{|\gamma^2 - 4mk|}}{2m}.$$
   Para analisar o movimento descrito por esta solução, consideremos constantes $A > 0$ e $\delta \in [0, 2\pi]$ tais que:
$$\begin{aligned} A &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \\ \cos\delta &= \frac{k_1}{A}, \\ \operatorname{sen}\delta &= \frac{k_2}{A} \end{aligned}$$
   Observemos que podemos reescrever $x(t)$ como:
$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\,\big(A\, \cos\delta \cos \omega_1 t + A\, \operatorname{sen}\delta\, \operatorname{sen} \omega_1 t\big) \\ &= A\, e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos(\omega_1 t - \delta). \end{aligned}$$
   Esta expressão nos diz que a massa oscila em torno de sua posição de equilíbrio $x = 0$ ficando confinada entre as curvas $\pm A e^{-\frac{\gamma}{2m}t}$. A "amplitude" da oscilação decresce com o tempo.

Vejamos agora casos em que há a atuação de uma força externa.

5.9.4 Oscilações Forçadas não-amortecidas

Vamos considerar uma força externa da forma $F(t) = F_0 \cos \omega t$ e o caso em que não há amortecimento:

$$m\, x'' + k\, x = F_0 \cos \omega t, \quad m, k > 0.$$

A equação característica é:

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0,$$
$$r = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0$$

e uma solução geral da equação homogênea associada é da forma

$$x_h(t) = k_1 \operatorname{sen} \omega_0 t + k_2 \cos \omega_0 t.$$

ω_0 é chamada de frequência natural (circular) do sistema massa-mola. Vamos, inicialmente, analisar o caso onde $\omega \neq \omega_0$:
Neste caso, estamos nas consdições da Regra 1 do método dos coeficientes indeterminados (a forca externa F e suas derivadas são l.i com bases do espaço solução) e vamos procurar uma solução particular da forma:

$$x_p = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t.$$

Logo:

$$\begin{aligned} m\, x'' + k\, x &= m \big(- A\, \omega^2 \cos \omega t - B\, \omega^2 \operatorname{sen} \omega t \big) + k \big(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t \big) \\ &= A \big(k - m\, \omega^2 \big) \cos \omega t + B \big(k - m\, \omega^2 \big) \operatorname{sen} \omega t \\ &= F_0 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ A &= \frac{F_0}{k - m\, \omega^2} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2} \\ &= \frac{F_0}{m\, (\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned}$$

Portanto, uma solução geral do problema não-homogêneo é dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= k_1 \operatorname{sen} \omega_0 t + k_2 \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Analisemos o caso em que ω está muito próximo de ω_0. Batimentos: $\omega \approx \omega_0$.
Vamos considerar a solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} mx'' + kx = F_0 \cos \omega t, \quad k, m > 0 \quad \omega \neq \omega_0 \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

Vimos que uma solução geral é dada por:

$$x(t) = k_1 \operatorname{sen} \omega_0 t + k_2 \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)} . \cos \omega t$$

Impondo as condições iniciais, temos:

$$\begin{cases} 0 = x(0) = k_2 + \dfrac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ 0 = x'(0) = k_1 \omega_0, \end{cases}$$

logo,

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t \\ &= \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \big(\cos \omega t - \cos \omega_0 t \big). \end{aligned}$$

Lembremos que:

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2\, sen A \operatorname{sen} B$$

e consideremos:

$$A = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t \qquad \textbf{e} \qquad B = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t$$

Podemos reescrever $x(t)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)} \big(\cos \omega t - \cos \omega_0 t \big) \\ &= \big(\frac{2\,F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)} \big) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\, t) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\, t. \end{aligned}$$

Como $\omega \approx \omega_0$ o termo $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\, t$ oscila muito mais lentamente do que o termo $\cos \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\, t$. Além disso, podemos interpretar $x(t)$ como tendo uma oscilação rápida com uma amplitude periódica que varia lentamente. Nestas circunstâncias temos o fenômeno de **Batimentos**.
Não vamos analisar o caso em que $\omega = \omega_0$. Quando completarmos o estudo de coeficientes indeterminados, voltaremos a ele. De qualquer modo, a solução acima nos dá uma indicação de que quando ω se aproxima de ω_0 a amplitude da oscilação cresce.

5.9.5 Oscilações Forçadas amortecidas

Vamos considerar uma força externa da forma $F(t) = F_0 \cos \omega t$ e o caso em que **há amortecimento**.

$$m\,x'' + \gamma\,k' + k\,x = F_0\,\cos \omega t, \quad m, k, \gamma > 0.$$

Vimos que uma solução geral da equação homogênea associada:

1. se $\gamma^2 - 4mk > 0$, é da forma

$$x_h(t) = k_1\,e^{r_1 t} + k_2\,e^{r_2 t}, \quad r_1, r_2 < 0$$

2. se $\gamma^2 - 4mk = 0$, é da forma:

$$\mathbf{x_h(t) = (k_1 + k_2\,t)\,e^{-\frac{\gamma}{2m}t}}$$

3. se $\gamma^2 - 4mk < 0$, é da forma:

$$x_h(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\,(k_1\,\cos \omega_1 t + k_2\,\operatorname{sen} \omega_1 t) \ \text{ com } \omega_1 = \frac{\sqrt{|\gamma^2 - 4mk|}}{2m}.$$

Vemos que $\mathbf{x_h(t) \to 0}$ quando $t \to \infty$. Por isso, x_h é chamada de solução transiente, isto é desaparece com o passar do tempo. Vamos utilizar o método dos coeficientes indeterminados. Procuraremos uma solução particular da forma $x_p = A\,\cos \omega t + B\,\operatorname{sen} \omega t$. Logo,

$$\begin{aligned} m\,x'' &+ \gamma\,x' + k\,x = \\ &= m\big(-A\,\omega^2\,\cos \omega t - B\,\omega^2\,\operatorname{sen} \omega t\big) + \gamma\,\big(-A\,\omega\,\operatorname{sen} \omega t + B\,\omega\,\cos \omega t\big) \\ &+ k\,\big(A\,\cos \omega t + B\,\operatorname{sen} \omega t\big) \\ &= \big(A\,(k - m\,\omega^2) + B\gamma\omega\big)\,\cos \omega t + \big(B\,(k - m\omega^2) - A\gamma\omega\big)\,\operatorname{sen} \omega t \\ &= F_0\,\cos \omega t. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{cases} A\,(k - m\omega^2) + B\,\gamma\omega = F_0 \\ B\,(k - m\omega^2) - A\,\gamma\omega = 0 \end{cases}$$

Isto é,

$$A = \frac{(k - m\omega^2)F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \qquad \text{e} \qquad B = \frac{\gamma\omega F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}.$$

como antes, tomando constantes $\rho > 0$ e $\delta \in [0, 2\pi]$ tais que:

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{A^2 + B^2}, \\
\cos\delta &= \frac{A}{\rho}, \\
\operatorname{sen}\delta &= \frac{B}{\rho},
\end{aligned}$$

podemos reescrever a solução particular:

$$\begin{aligned}
x_p(t) &= A\,\cos\omega t + B\,\operatorname{sen}\omega t && = \rho\cos(\omega t - \delta) \\
&= \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\,\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}\,\cos(\omega t - \delta).
\end{aligned}$$

Portanto, uma solução geral do problema não-homogêneo é dada por:

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\
&= x_h(t) + \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\,\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}\,\cos(\omega t - \delta).
\end{aligned}$$

A função $\dfrac{F_0}{\sqrt{(k - m\,\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}\,\cos(\omega t - \delta)$ é chamada de solução periódica estacionária. Ela é a solução que "permanece" após o desaparecimento da solução transiente.
Vejamos que as equações lineares homogêneas de coeficientes constantes descrevendo outros problemas interessantes..
Analisemos o movimento de um corpo que é atraído por uma força proporcional à distância do corpo a um certo ponto.

Exemplo 76. *Uma massa m move-se ao longo do eixo x (no setido positivo) e é atraída para a origem por uma força proporcional à distância da massa à origem. Achar a equação do movimento.*

Então:

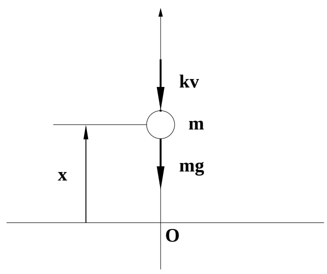
$$m\,x'' = m\,a = F = -k\,x, \quad k > 0,$$

pois a força se opõe ao movimento. Logo, temos exatamente a equação do movimento harmônico simples e uma solução geral é da forma

$$x(t) = k_1\,\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}t + k_2\,\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Agora, analisemos o movimento de um corpo lançado pra cima sujeito a resistência do ar.

Exemplo 77. *Uma massa m é lançada verticalmente cima com velocidade inicial v_0. Achar a função que descreve o movimento do corpo.*



Tomemos a origem no ponto de lançamento e orientemos o eixo com sentido positivo para cima. Denotemos x a distância da massa em relação à origem O no instante t. Temos:

$$m\,x'' = m\,a = F = -m\,g - k\,v = -m\,g - k\,x'.$$

Resolvendo a equação característica:

$$r^2 + \frac{k}{m} r = 0,$$

obtemos uma solução geral da equação homogênea associada, na forma:

$$x_h(t) = k_1 + k_2\,e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Não podemos utilizar o método de coeficientes indeterminados pois as funções constantes são múltiplas de um dos elementos da base do espaço solução. Vamos usar variação dos parâmetros:

$$x_p(t) = c_1(t) + c_2(t)\,e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
x_p'(t) &= c_1' + c_2' e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k}{m} c_2 e^{-\frac{k}{m}t} \\
c_1' + c_2' e^{-\frac{k}{m}t} &= 0 \\
x_p''(t) &= -\frac{k}{m} c_2' e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k^2}{m^2} c_2 e^{-\frac{k}{m}t}.
\end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial

$$m\,x_p'' + k\,x_p' = -k\,c_2' e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k^2}{m}\,c_2\,e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k^2}{m}\,c_2\,e^{-\frac{k}{m}t} = -m\,g$$

logo,

$$
\begin{aligned}
&c_1' + c_2'\, e^{-\frac{k}{m}t} = 0\\
&-k\, c_2'\, e^{-\frac{k}{m}t} = -m\, g\\
&k\, c_1' = -m\, g\\
&c_1 = -\frac{mg}{k}\, t\\
&c_2 = \frac{m^2 g}{k^2}\, e^{\frac{k}{m}t}.
\end{aligned}
$$

Uma solução geral da equação não-homogênea é da forma

$$
x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x_h(t) - \frac{mg}{k}\, t + \frac{m^2 g}{k^2} = k_1 + k_2\, e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}\, t.
$$

As condições iniciais são $\mathbf{x(0) = 0}$ e $\mathbf{x'(0) = v_0}$

$$
\begin{cases}
0 = x(0) = k_1 + k_2\\
v_0 = x'(0) = -\frac{k}{m} k_2 - \frac{mg}{k},
\end{cases}
$$

então:

$$
-k_1 = k_2 = -\frac{v_0 m}{k} - \frac{m^2 g}{k^2}.
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
x(t) &= k_1 + k_2\, e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}\, t\\
&= -\frac{v_0\, m\, k + m^2\, g}{k^2}\left(1 + e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mg}{k}\, t.
\end{aligned}
$$

Um outro exemplo da aplicação de equações de segunda ordem pode ser visto num modelo de fluxo de corrente elétrica em um circuito simples.
Podemos observar que tanto a equação para a carga quanto a da corrente são equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes tais como as que analisamos para o sistema massa-mola. Isto nos dá um exemplo do papel unificador da matemática: a análise e compreensão de vários situações físicas distintas pode ser feita através do conhecimento das equações lineares de segunda ordem de coeficientes constantes.