Capítulo 3

Edo's de Primeira Ordem

3.1 Introdução

Neste capítulo estamos interessados em obter e analisar as soluções das edo's de primeira ordem. Isto é, edo's que podem ser escritas na forma:

$$F(y', y, x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad y' = f(x, y)$$

Estudaremos vários métodos elementares de resolução de vários tipos especiais de edo's de primeira ordem. Veremos a maioria dos métodos reduz o problema de obtenção de solução ao cálculo de primitivas.
Sejam $I \subset \mathbb{R}$ e uma função $H : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Lembremos que uma primitiva de H em I é uma função $G : I \to \mathbb{R}$ tal que $G'(x) = H(x)$ para todo $x \in I$. Sendo G uma primitiva de F, sabemos que, para toda constante c, $G(x) + c$ também é uma primitiva de H. A família das primitivas de H é denominada de integral indefinida de G e denotada por

$$\int H(x)\,dx = G(x) + c.$$

Ou seja,

$$\int \frac{d\,G(x)}{dx}\,dx = \int H(x)\,dx = G(x) + c. \tag{3.1}$$

Isto é, $\Phi(x) = G(x) + c$ é solução geral da edo:

$$\frac{d\Phi}{dx} = H.$$

3.2 Edo's de Variáveis Separáveis

Exemplo 18. *Considere a seguinte edo:*

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\alpha}{V}\,P, \tag{3.2}$$

onde α e V são constantes. Reescrevendo a equação (3.2), obtemos:

$$\frac{d}{dt}\ln|P(t)| = \frac{1}{P}\,\frac{dP}{dt} = -\frac{\alpha}{V}.$$

Integrando com respeito a t e usando (3.1), vemos que a solução geral da edo (3.2) é dada por

$$P(t) = c\,e^{-\frac{\alpha}{V}t}$$

Vamos tentar generalizar o procedimento acima. O quê havia de especial nesta edo que nos permitiu determinarmos P?

Definição 9. *Uma edo de primeira ordem é do tipo separável se é da forma:*

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y).} \tag{3.3}$$

Observação 5. *Se a é tal que $g(a) = 0$, a função $y(x) = a$ é solução da edo (3.3).*

3.2.1 Obtenção de Soluções não Constantes

Discutiremos a resolução da edo (3.3), supondo que f e g estão definidas em intervalos abertos I e J, respectivamente, e que f é contínua em I e g' é contínua em J.

Resolução:

1. Reescrevemos a equação, "separando as variáveis":

$$\frac{1}{g(y)}\,\frac{dy}{dx} = f(x)$$

2. Consideremos uma primitiva $H(x)$ de $\dfrac{1}{g(x)}$ e uma primitiva $G(x)$ de $f(x)$. Isto é:

$$\frac{dH}{dx}(x) = \frac{1}{g(x)} \qquad \text{e} \qquad \frac{dG}{dx}(x) = f(x)$$

3. Usamos (3.1) em

$$\int \frac{d}{dx} H\left(g(y(x))\right)\, dx = \int \frac{1}{g(y)}\, \frac{dy}{dx}\, dx = \int f(x)\, dx,$$

para obter a solução geral da edo (3.3) na forma implícita:

$$H(g(y(x))) = G(x) + c.$$

Exemplo 19.

$$\frac{dy}{dx} = 2\, x\, \sqrt{y-1}$$

Inicialmente, vamos procurar soluções constantes. Observemos que $y = 1$ é raiz de $g(y) = \sqrt{y-1} = 0$. Logo $y(x) = 1$ é solução da edo. Para determinarmos as soluções não-constantes, separamos a variáveis e integramos:

$$\frac{1}{\sqrt{y-1}}\, \frac{dy}{dx} = 2\, x$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{y(x)-1}\right)\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{y-1}}\, \frac{dy}{dx}\, dx = \int 2\, x\, dx$$

e obtemos a solução geral da edo na forma implícita

$$2\, \sqrt{y(x)-1} = x^2 + c$$

ou

$$y(x) = \frac{1}{4}\, (x^2 + c)^2 + 1$$

Observe, que no caso da edo deste exemplo a solução constante $y(x) = 1$ não pode ser deduzida da solução geral. Logo $y(x) = 1$ é uma solução singular da edo .

Observação 6. *Através de uma mudança na variável de integração, obtemos*

$$\int \frac{1}{g(y)}\, \frac{dy}{dx}\, dx = \int \frac{1}{g(y)}\, dy.$$

Método Prático:

1. Reescrevemos a equação, "separando as variáveis":

$$\frac{1}{g(y)}\, \frac{dy}{dx} = f(x)$$

2. Integramos os dois lados com respeito à variável independente

$$\int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx}\, dx = \int f(x)\, dx$$

3. Usamos a Observação 6

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx}\, dx = \int f(x)\, dx.$$

E a solução é:

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx.} \tag{3.4}$$

Exemplo 20. *Considere a seguinte edo:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

Resolução:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{y}\, dy = -\int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c|,$$

então, $y(x) = \dfrac{c}{x}$ é a solução geral da edo .

Exemplo 21.

$$y' = -\frac{(1+x)y}{(1-y)x}$$

Resolução:

$$\frac{1-y}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1+x}{x}, \qquad \int \frac{1-y}{y}\, dy = -\int \frac{1+x}{x}\, dx$$

$$\ln|y| - y = -\ln|x| - x + c;$$

então $\ln|x\,y| + x - y = c$ é a solução geral da edo.

3.3 Edo's de Primeira Ordem Linear

Definição 10. *Uma edo de primeira ordem é* **linear** *se pode ser escrita na forma:*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x).$$

Se a função $q(x) \equiv 0$*, dizemos que é uma edo de primeira ordem* **linear homogênea**, *caso contrário,* **linear não-homogênea**.

Definição 11. *Um* **fator integrante** *para uma edo é uma função* $\mu(x, y)$ *tal que a multiplicação da equação por* $\mu(x, y)$ *fornece uma equação em que cada lado pode ser identificado como uma derivada com respeito a* x.

Com a ajuda de um fator integrante apropriado, há uma técnica padrão para resolver as chamadas edo's de primeira ordem lineares.

Exemplo 22.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2} = 2 + x \tag{3.5}$$

Vamos procurar um fator integrante que seja função somente de x.

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\mu(x)y = (2 + x)\mu(x).$$

Gostaríamos que o lado esquerdo fosse a derivada do produto $\mu(x)\, y$. Ou seja, que ele fosse igual a:

$$\frac{d}{dx}\,(\mu(x)\, y) = \mu(x)\,\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}\, y$$

Comparando termo a termo, o fator integrante, caso exista, deve satisfazer:

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{1}{2}\,\mu(x)$$

Resolvendo a equação de variáveis separáveis acima, temos:

$$\int \frac{1}{\mu}\, d\mu = \int \frac{1}{2}\, dx$$

Logo; $\ln|\mu| = \dfrac{x}{2} + c$, isto é $\mu(x) = C\, e^{\frac{x}{2}}$. Fazendo $C = 1$, temos $\mu(x) = e^{\frac{x}{2}}$, e obtemos:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x}{2}}\, y\right) = e^{\frac{x}{2}}\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\, e^{\frac{x}{2}}\, y = (2 + x)\, e^{\frac{x}{2}}$$

e integrando com respeito a x, temos

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{x}{2}}\,y &= \int \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x}{2}}\,y\right)\,dx = \int (x+2)\,e^{\frac{x}{2}}\,dx = \int x\,e^{\frac{x}{2}}\,dx + \int 2\,e^{\frac{x}{2}}\,dx \\
&= x\,2\,e^{\frac{x}{2}} - \int 2\,e^{\frac{x}{2}}\,dx + 4\,e^{\frac{x}{2}} + c = x\,2\,e^{\frac{x}{2}} - 4\,e^{\frac{x}{2}} + 4\,e^{\frac{x}{2}} + c = x\,2\,e^{\frac{x}{2}} + c,
\end{aligned}
$$

onde usamos integração por partes no primeiro termo. Logo,

$$y(x) = 2\,x + c\,e^{-\frac{x}{2}}$$

é solução geral da edo (3.5).

3.3.1 Obtenção de Soluções

Vamos repetir o argumento usado no exemplo anterior para resolver a edo de primeira ordem linear:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x). \tag{3.6}$$

Primeiramente, vamos procurar um fator integrante que seja função somente de x

$$\mu(x)\,\frac{dy}{dx} + \mu(x)\,p(x)\,y = q(x)\,\mu(x).$$

Gostaríamos que o lado esquerdo fosse a derivada do produto $\mu(x)y$. Ou seja, que ele fosse igual a

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)\,y] = \mu(x)\,\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}\,y.$$

Comparando termo a termo, o fator integrante, caso exista, deve satisfazer

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)\,p(x).$$

Resolvendo a equação de variáveis separáveis acima, temos

$$\int \frac{1}{\mu}\,d\mu = \int p(x)\,dx.$$

Logo, a função

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

é um fator integrante para a edo (3.6). Multiplicando a equação (3.6) por $\mu(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\,dx}\,y\right) &= e^{\int p(x)\,dx}\,\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\,dx}\right)\,y \\ &= e^{\int p(x)\,dx}\left(\frac{dy}{dx} + p(x)\,y\right) = q(x)e^{\int p(x)dx}\end{aligned}$$

e integrando com respeito a x, temos

$$e^{\int p(x)dx}\,y = \int q(x)\,e^{\int p(x)dx}\,dx + c$$

Logo,

$$\boxed{y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}\,dx + c\right)}$$

é solução geral da edo (3.6).

Resumo:

Para determinar a solução geral de edo 's lineares:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x), \tag{3.7}$$

1. determinar um fator integrante da forma

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

2. a solução geral da edo linear (3.7) é dada por

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\,q(x)\,dx + c\right).$$

Nas próximas seções, veremos alguns métodos de resolução de edo's que envolvem uma mudança na variável dependente.

3.4 Equação de Bernoulli

Exemplo 23. *Consideremos a edo:*

$$2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} = 4\,x^2 + 3\,y^2 \tag{3.8}$$

Façamos mudança de variável $v = y^2$. As derivadas de v e y satisfazem

$$\frac{dv}{dx} = 2\,y\,\frac{dy}{dx}$$

reescrevendo a edo (dividindo por $x\,y^2$), temos

$$2\,y\,\frac{dy}{dx} - 3\,\frac{y^2}{x} = 4\,x$$

fazendo a mudança de variável, obtemos:

$$\frac{dv}{dx} - 3\,\frac{v}{x} = 4\,x. \tag{3.9}$$

Isto é, obtivemos uma edo linear. Resolvendo esta equação, obtemos que uma solução geral da edo (3.9) é dada por

$$v(x) = x^3 \int 4\,x^{-3}\,x\,dx = -4\,x^2 + c\,x^3.$$

Voltando à variável original y. Como $v = y^2$, temos

$$y^2(x) = -4\,x^2 + c\,x^3$$

é solução geral da edo (3.8).

Definição 12. *Uma edo de primeira ordem que pode ser escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)\,y^n \tag{3.10}$$

é chamada uma edo de Bernoulli. Observemos que se $n = 0$ ou $n = 1$, a equação de Bernoulli é uma edo linear.

3.4.1 Obtenção de Soluções

Para determinar a solução geral da equação de Bernoulli (3.10), vamos considerar a seguinte mudança de variável:

$$v = y^{1-n}$$

Derivando com respeito a x, obtemos:

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\,\frac{dy}{dx}$$

Reescrevendo a edo (3.10), obtemos

$$(1-n)\,y^{-n}\,\frac{dy}{dx}+(1-n)\,p(x)\,y^{1-n}=(1-n)\,q(x).$$

Na variável v, temos

$$\frac{dv}{dx}+(1-n)\,p(x)\,v=(1-n)\,q(x).$$

Ou seja, obtivemos uma edo linear.

O conteúdo da próxima seção é de autoria do aluno do $4^{\underline{o}}$ período do curso de Física da UERJ, Israel Nunes de Almeida Júnior e nesta oportunidade, a autora o agradece por ele ter gentilmente cedido este texto para publicação no presente livro. Esta seção tem o mérito de apresentar um método de resolução de EDOs de primeira ordem que não estava contemplado na versão anterior do livro online: o Método de Lagrange. Além de apresentar sua aplicação usual para a resolução de EDOs de primeira ordem lineares, Israel estende sua aplicação às EDOs do tipo Bernoulli.

Em 2006, durante o curso de *Cálculo Diferencial e Integral III*, Israel propôs a seguinte questão: "O método de Lagrange, usado para resolução de equações diferenciais lineares, também é válido para resolução de EDOs do tipo Bernoulli?"

Em resposta a esta questão, propus ao Israel que ele mesmo investigasse esta possibilidade. Primeiro, testando o método em um exemplo particular. Sendo bem sucedido nesta etapa, aplicando-o a uma EDO qualquer do tipo Bernoulli. Ao final deste processo, foi feita uma comparação entre este método e o método apresentado neste livro. Posteriormente, para efeito de completude deste trabalho, ele fez um levantamento bibliográfico a fim de identificar outros possíveis autores que apresentassem esta estratégia de resolução para EDOs do tipo Bernoulli. Esta mesma proposta foi estendida aos demais alunos inscritos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III e apenas nos livros de Abunahman e Piskounov foram encontradas menções a esta estratégia. Destaco, entretanto, que estes autores apenas sugeriram a aplicação ou empregaram esta estratégia em exemplos particulares. Esta seção é resultado desta investigação.

3.4.2 Outro método de resolução de EDOs do tipo Bernoulli

por Israel Nunes de Almeida Júnior

Dizemos que uma equação é do tipo Bernoulli, se ela pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n \tag{3.11}$$

onde P e Q são constantes ou funções de x.

Já vimos que a EDO pode ser transformada em uma EDO linear através da mudança de variável $v = y^{1-n}$. Vale salientar que para $n = 0$ ou $n = 1$, a equação é na verdade linear, e a substituição não é necessária. Usando a mudança de variável mencionada, a equação (3.11) fica

$$\frac{v}{dx} + P_1 v = Q_1, \tag{3.12}$$

onde $P_1 = (1-n)P$ e $Q_1 = (1-n)Q$. Observe que a equação (3.12) é linear em v.

Antes de prosseguirmos, vamos apresentar o chamado método de Lagrange para EDOs lineares.

Método de Lagrange – EDOs lineares

O método de Lagrange é usado para resolver EDOs lineares. Isto é, EDOs que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \tag{3.13}$$

onde P e Q são constantes ou funções de x.

No método de Lagrange, procuramos uma solução de (3.13) na forma de um produto. Isto é, $y(x) = u(x)v(x)$. Observe que, neste caso, a derivada de y é dada por

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Substituindo a expressão acima em (3.13), obtemos

$$u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q \tag{3.14}$$

As funções u e v são determinadas em duas etapas.

1. Primeiro, determinamos uma função v tal que
$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0. \tag{3.15}$$
2. Depois, determinamos as funções u tais que
$$v\frac{du}{dx} = Q, \tag{3.16}$$
onde v é a função determinada no item anterior.

Determinação de v: Para resolver (3.15), multiplique os dois membros da equação por dx:
$$dv + Pdx = 0.$$
Separe as variáveis:
$$\frac{dv}{v} = -Pdx.$$
Integre:
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{v} dv &= -\int Pdx \\ \ln|v| &= -\int Pdx + C.\end{aligned}$$
Logo,
$$|v| = e^C e^{-\int Pdx}$$
Isto, é a função v deve ser da forma
$$v = Ke^{-\int Pdx}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Determinação de u: Vamos, agora, determinar as funções u que resolvem (3.16) para v dado por $v = e^{-\int Pdx}$ (observe que isto corresponde à escolha $K = 1$ na equação acima). Substituindo v em (3.16):
$$\begin{aligned}e^{-\int Pdx}\frac{du}{dx} &= Q \\ \frac{du}{dx} &= e^{\int Pdx}Q\end{aligned}$$
Integrando:
$$u = \int e^{\int Pdx}Qdx$$

Como $y = uv$, tem-se:

$$y = e^{-\int P dx} \int e^{\int P dx} Q dx \tag{3.17}$$

Método de Lagrange e EDOs do tipo Bernoulli – Um caso particular

Vejamos agora, através de um exemplo, que estas mesmas idéias podem ser aplicadas a uma EDO do tipo Bernoulli. Considere a EDO:

$$\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = 3xy^2.$$

Fazendo $y(x) = u(x)v(x)$, derivando com respeito a x:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

e substituindo

$$\begin{aligned} u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - 2\frac{uv}{x} &= 3xu^2v^2 \\ u\left(\frac{dv}{dx} - 2\frac{v}{x}\right) + v\frac{du}{dx} &= 3xu^2v^2 \end{aligned}$$

Calculando v:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} - 2\frac{v}{x} &= 0 \\ \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x} &= 0 \end{aligned}$$

Integrando:

$$\ln|v| = 2\ln|x| + C.$$

Podemos tomar uma solução particular $v(x) = x^2$.

Calculando u:

$$\begin{aligned} x^2\frac{du}{dx} &= 3xu^2x^4 \\ u^{-2}du &= 3x^3dx \end{aligned}$$

Integrando:

$$-\frac{1}{u} = \frac{3x^4}{4} + C.$$

Assim:

$$u(x) = -\frac{4}{3x^4 + K}.$$

Como $y(x) = u(x)v(x)$, tem-se

$$y(x) = -\frac{4x^2}{3x^4 + K} \qquad (\textit{Solução Geral})$$

Para averiguar a consistência deste método, propomos também a solução da mesma EDO pelo método apresentado anteriormente, ou seja, EDOs do tipo Bernoulli. Tomemos novamente a EDO:

$$\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = 3xy^2.$$

Dividindo por y^2:

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - 2\frac{1}{x}y^{-1} = 3x.$$

Substituindo $w = y^{-1}$ e derivando com respeito a x

$$\frac{dw}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

Na nova variável, a equação se reescreve:

$$\frac{dw}{dx} + \frac{2}{x}w = -3x.$$

Observe que trata-se de uma EDO linear em w.

Vamos resolver esta EDO linear pelo método de Lagrange. Fazendo $w(x) = u(x)v(x)$, obtemos

$$\frac{dw}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Substituindo

$$u\left(\frac{dv}{dx} + 2\frac{v}{x}\right) + v\frac{du}{dx} = -3x.$$

Calculando v:

$$\frac{dv}{dx} + 2\frac{v}{x} = 0$$
$$\frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$\ln|v| = -2\ln|x| + C.$$

Podemos tomar uma solução particular $v(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Calculando u:

$$\frac{1}{x^2}\frac{du}{dx} = -3x$$

Integrando:

$$du = -3x^3 dx$$
$$u(x) = -\frac{3x^4}{4} + C.$$

Como, $w(x) = u(x)v(x)$, tem-se

$$w(x) = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{3x^4}{4} + C\right)$$
$$w(x) = -\frac{3x^2}{4} + \frac{C}{x^2}.$$

Reduzindo ao mesmo denominador

$$w(x) = \frac{4C - 3x^2}{4x^2}$$

Como $w = y^{-1}$, pode-se escrever, já que $4C = -K$:

$$y(x) = -\frac{4x^2}{3x^4 + K}.$$

Este foi o mesmo resultado obtido quando utilizamos o Método de Lagrange. Observamos ainda que, procedendo desta forma, precisamos efetuar mais mudanças de variáveis do que no método de Lagrange.

Método de Lagrange e EDOs do tipo Bernoulli – O caso geral

Considere agora uma EDO do tipo Bernoulli. Isto é, uma EDO da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n. \tag{3.18}$$

com $n \neq 0$ e $n \neq 1$. Vamos tentar obter sua solução y pelo método de Lagrange.

Fazendo a substituição $y(x) = u(x)v(x)$ e derivando com respeito a x:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)\frac{uv}{x} &= Q(x)(uv)^n \\ u\left(\frac{dv}{dx} + P(x)v\right) + v\frac{du}{dx} &= Q(x)u^n v^n. \end{aligned}$$

Calculando v:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} + P(x)v &= 0 \\ \frac{dv}{v} &= -P(x)dx \end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{v}dv &= -\int P(x)dx \\ \ln|v| &= -\int P(x)dx \end{aligned}$$

Isto é, $v(x) = e^{-\int P(x)dx}$.

Calculando u:

$$\begin{aligned} v\frac{du}{dx} &= Q(x)u^n v^n \\ \frac{du}{dx} &= Q(x)u^n v^{n-1} \\ \frac{du}{u^n} &= Q(x)v^{n-1}dx \end{aligned}$$

Integrando:

$$\int \frac{1}{u^n} du = \int Q(x) v^{n-1} dx$$
$$\frac{u^{1-n}}{1-n} = \int Q(x) v^{n-1} dx + C$$
$$u^{1-n} = (1-n)\left(\int Q(x) v^{n-1} dx + C\right)$$
$$u = \left[(1-n)\left(\int Q(x) v^{n-1} dx + C\right)\right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

Lembrando que $v(x) = e^{-\int P(x)dx}$ e substituindo em u:

$$u = \left[(1-n)\left(\int Q(x)\left(e^{-\int P(x)dx}\right)^{n-1} dx + C\right)\right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

Como, $y(x) = u(x)v(x)$, temos

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[(1-n)\left(\int Q(x)\left(e^{-\int P(x)dx}\right)^{n-1} dx + C\right)\right]^{\frac{1}{1-n}},$$

que é a solução geral da EDO de Bernoulli (3.18) obtida através do Método de Lagrange.

Observe que se resolvemos a EDO de Bernoulli (3.18) pela substituição $w = y^{1-n}$, podemos reescrever a EDO (3.18) na nova variável:

$$\frac{dw}{dx} + P_1(x)w = Q_1(x),$$

onde $P_1(x) = (1-n)P(x)$ e $Q_1(x) = (1-n)Q(x)$.

Pelo método de Lagrange, fazendo $w(x) = u(x)v(x)$, obtemos:

$$u\left(\frac{dv}{dx} + P_1(x)v\right) + v\frac{du}{dx} = Q_1(x).$$

Calculando v:

$$\frac{dv}{dx} + P_1(x)v = 0$$
$$\frac{dv}{v} = -P_1(x)dx$$

Integrando:

$$\int \frac{1}{v} dv = -\int P_1(x)dx$$
$$\ln|v| = -\int P_1(x)dx$$

Isto é, $v(x) = e^{-\int P_1(x)dx}$.

Calculando u:

$$v\frac{du}{dx} = Q_1(x)$$
$$du = Q_1(x)v^{-1}dx$$

Integrando:

$$u = \int Q_1(x)v^{-1}dx + C$$

Lembrando que $v(x) = e^{-\int P_1(x)dx}$ e substituindo em u:

$$u = \left(\int Q_1(x)e^{\int P_1(x)dx}dx + C\right).$$

Como, $w(x) = u(x)v(x)$, temos

$$w(x) = (1-n)e^{(n-1)\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Por outro lado, $w = y^{1-n}$. Logo

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[(1-n)\left(\int Q(x)\left(e^{-\int P(x)dx}\right)^{n-1}dx + C\right)\right]^{\frac{1}{1-n}},$$

que é a mesma solução geral da EDO de Bernoulli (3.18) obtida através do Método de Lagrange.

Exemplos

1.

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = xy^3$$

Solução: $y(x) = u(x)v(x)$ e $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - 2xuv = xu^3v^3$$
$$u\left(\frac{dv}{dx} - 2xv\right) + v\frac{du}{dx} = xu^3v^3$$

Calculando v:

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0$$
$$\frac{dv}{v} = 2xdx$$
$$\ln|v| = x^2 + C$$
$$v(x) = e^{x^2}$$

Calculando u:

$$e^{x^2}\frac{du}{dx} = xe^{3x^2}u^3$$
$$u^{-3}du = xe^{3x^2}dx$$

Calculando a integral $\int xe^{2x^2}dx$ Fazendo $\alpha = 2x^2$, tem-se $4xdx = d\alpha$ e

$$\int xe^{2x^2}dx = \frac{1}{4}\int e^{\alpha}d\alpha = \frac{\alpha}{4} + C = \frac{e^{2x^2}}{4} + C$$

Integrando:

$$-\frac{1}{2u^2} = \frac{e^{2x^2} + K}{4}$$
$$u^2 = -\frac{2}{e^{2x^2} + K}.$$

Como, $y(x) = u(x)v(x)$, temos $y^2(x) = u^2(x)v^2(x)$. Logo

$$y^2(x) = -\frac{2e^{2x^2}}{e^{2x^2} + K} \qquad \text{(Solução Geral)}$$

2.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$$

Solução: $y(x) = u(x)v(x)$ e $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - \frac{4}{x}uv = x\sqrt{u}\sqrt{v}$$
$$u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}v\right) + v\frac{du}{dx} = x\sqrt{u}\sqrt{v}$$

Calculando v:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}v = 0$$
$$\frac{dv}{v} = \frac{4}{x}dx$$
$$v(x) = x^4$$

Calculando u:

$$x^4\frac{du}{dx} = x\sqrt{u}\sqrt{x^4}\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$\sqrt{u} = \ln\sqrt{x} + K$$
$$u = (\ln\sqrt{x} + K)^2$$

Como, $y(x) = u(x)v(x)$, temos

$$y(x) = x^4(\ln\sqrt{x} + K)^2 \qquad \text{(Solução Geral)}$$

Discussão sobre o “novo” método

O método analisado propõe a resolução da equação de Bernoulli pelo método de Lagrange. Esse método se mostrou viável e simplificado na prática, visto que realizamos apenas uma mudança de variável ($y(x) = u(x)v(x)$), diferentemente do método de resolução mais comum, onde substituímos $y^{1-n} = w$, e posteriormente encontramos a função w como solução de uma EDO linear e, finalmente, determinamos a solução da EDO do tipo Bernoulli original. Nos exemplos apresentados, não ficou evidenciada uma tendência para resolução de integrais de forma mais complicada do que normalmente apareceriam se as EDOs fossem resolvidas pelo método mais usual. Desta forma, a resolução por este método se mostrou confiável e mais facilmente compreendida pelos alunos. Além disso, ele permite uma resolução das EDOs de maneira mais rápida e prática.

Bibliografia

[1] ABUNAHMAN, S., Equações Diferencias, ERCA Editora e Gráfica Ltda, Rio de Janeiro, 1989.

[2] AGNEW, R. P., Diferential Equations, Editora McGraw-Hill, New York, 1960.

[3] AYRES, F., Equações Diferencias, Editora McGraw-Hill, São Paulo, 1959.

[4] DIAS, A. T., Curso de Cálculo Infinitesimal, Fundação Gorceix, Ouro Preto, 1962.

[5] MACHADO, Kleber Daum. Equações Diferenciais aplicadas à Física. Paraná. Editora UEPG, 2000

[6] PISKOUNOV, N., Cálculo Diferencial e Integral: Volume II, Editora Lopes da Silva, Portugal, 1987.

[7] ZILL, D. G. & CULLEN, M. R., Equações Diferenciais: Volume 1, Editora Makron Books, São Paulo, 2005.

3.5 Equação de Riccati

Definição 13. *Equações de Riccati são edo's de primeira ordem que podem ser escritas na forma:*

$$\frac{dy}{dx} = q(x)\, y^2 + p(x)\, y + r(x) \tag{3.19}$$

Observe que quando $q(x) = 0$*, temos uma equação linear e quando* $r(x) = 0$*, temos uma equação de Bernoulli com* $n = 2$*.*

Observação 7. *Liouville, matemático francês, mostrou que uma solução geral da equação de Riccati (nos caso em que ela não é linear nem do tipo Bernoulli) só pode ser explicitamente obtida se já conhecermos uma solução.*

Vamos deduzir um método de resolução para o caso em que conhecemos uma solução de (3.19) que denotaremos por y_1. Vejamos um exemplo:

Exemplo 24. *Sabendo que $y_1(x) = x$ é uma solução, resolver a edo de Riccati:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 3. \tag{3.20}$$

Consideremos a mudança de variável

$$z = y - y_1 = y - x$$

Derivando, obtemos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1.$$

Usando a equação (3.20). como $y_1(x) = x$ é uma solução, temos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1 = -\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 3 - 1.$$

fazendo a substituição $y = y_1 + z = x + z$, temos:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{(x+z)^2}{x^2} - \frac{x+z}{x} + 3 - 1 = -\frac{2\,x\,z}{x^2} - \frac{z^2}{x^2} - \frac{z}{x}.$$

Ou seja, obtivemos uma equação de Bernoulli:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{3}{x}\,z = -\frac{1}{x^2}\,z^2. \tag{3.21}$$

Resolvendo e equação de Bernoulli (3.21), obtemos que

$$z(x) = \frac{4\,x}{4\,c\,x^4 - 1}$$

é solução geral da edo (3.21). Como $y = y_1 + z = x + z$, temos

$$y(x) = x + z(x) = \frac{4\,c\,x^5 + 3\,x}{4\,c\,x^4 - 1}.$$

3.5.1 Determinação de Soluções

Vamos tratar o caso geral. Seja y_1 uma solução particular da equação de Riccati:

$$\frac{dy}{dx} = q(x)\,y^2 + p(x)\,y + r(x).$$

Neste caso, a mudança de variável

$$z = y - y_1$$

transforma a equação de Riccati na variável y em uma equação de Bernoulli com $n = 2$ na variável z. De fato, temos:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{dy_1}{dx}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{dy_1}{dx} &= q\,y^2 + p\,y + r - \frac{dy_1}{dx} \\ &= q\,(y_1 + z)^2 + p\,(y_1 + z) + r - \frac{dy_1}{dx} \\ &= 2\,q\,y_1\,z + q\,z^2 + p\,z + \left(q\,y_1^2 + p\,y_1 + r - \frac{dy_1}{dx}\right),\end{aligned}$$

como y_1 é uma solução, a exepressão entre parênteses é igual a zero, ou seja, obtivemos uma edo de Bernoulli com $n = 2$ para a variável z:

$$\boxed{\frac{dz}{dx} - (2\,q(x)\,y_1(x) + p(x))\,z = q(x)\,z^2.}$$

3.5.2 Método Alternativo de Resolução da edo de Riccati

Seja y_1 uma solução particular da equação de Riccati:

$$\frac{dy}{dx} = q(x)\,y^2 + p(x)\,y + r(x).$$

Vimos que a mudança de variável:

$$z(x) = y(x) - y_1(x)$$

transforma a equação de Riccati na variável y em uma equação de Bernoulli com $n = 2$ na variável z. Por outro lado, sabemos que a mudança de variável:

$$z(x) = v^{1-2}(x) = v^{-1}(x)$$

transforma a equação de Bernoulli com $n = 2$ na variável z em uma edo linear na variável v. Combinando as duas mudanças de variável acima, vemos que a seguinte mudança de variável:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{v(x)},$$

transforma a equação de Riccati na variável y em uma equação linear na variável v. De fato, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{dv}{dx}\,\frac{1}{v^2(x)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} - \frac{dv}{dx}\,\frac{1}{v^2} &= \frac{dy}{dx} = q\,y^2 + p\,y + r\\
\frac{dy_1}{dx} - \frac{dv}{dx}\,\frac{1}{v^2} &= q\,\left(y_1 + \frac{1}{v}\right)^2 + p\,\left(y_1 + \frac{1}{v}\right) + r\\
-\frac{dv}{dx}\,\frac{1}{v^2} &= \left(q\,y_1^2 + p\,y_1 + r - \frac{dy_1}{dx}\right) + \frac{2\,y_1\,q}{v} + \frac{q}{v^2} + \frac{p}{v},
\end{aligned}$$

como y_1 é uma solução da edo, a expressão entre parênteses é igual a zero, ou seja:

$$-\frac{1}{v^2}\,\frac{dv}{dx} = \frac{2\,y_1\,q}{v} + \frac{q}{v^2} + \frac{p}{v},$$

então obtivemos a edo linear:

$$\boxed{\frac{dv}{dx} + \left(p(x) + 2\,y_1(x)\,q(x)\right)\,v(x) = -q(x).}$$

Exemplo 25. *Ache a solução geral da seguinte edo de Riccati:*

$$y' - 1 - x^2 + 2\,x\,y - y^2 = 0,$$

se $y_1(x) = x$ é uma solução.

Reescrevendo a edo: $y' = y^2 - 2\,x\,y + x^2 + 1$; logo, $q(x) = 1$ e $p(x) = -2\,x$, então:

$$\begin{aligned}
v' + (-2\,x + 2\,x)\,v &= -1\\
v' &= -1,
\end{aligned}$$

de onde $v = -x + c$. A solução geral da edo de Riccati é $y(x) = y_1(x) + \dfrac{1}{v(x)}$, isto é:

$$y(x) = \frac{x^2 - c\,x - 1}{x - c}.$$

Exemplo 26. *Ache a solução geral da seguinte edo de Riccati:*

$$y' - y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2} = 0; \; x > 0,$$

se $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ *é uma solução.*

Reescrevendo a edo: $y' = y^2 - \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x^2}$; logo, $q(x) = 1$ e $p(x) = -\dfrac{1}{x}$, então:

$$v' + \left(-\frac{1}{x} + 2\,\frac{1}{x}\right) v = -1$$
$$v' + \frac{1}{x}\, v = -1,$$

de onde $v = \dfrac{c\,-x^2}{2\,x}$. A solução geral da edo de Riccati é $y(x) = y_1(x) + \dfrac{1}{v(x)}$, isto é:

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{2\,x}{c\,-x^2}.$$

3.6 Edo's Exatas

Exemplo 27. *Consideremos a seguinte edo:*

$$2\,x + y^2 + 2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

Seja $\psi(x,y) = x^2 + x\,y^2$; então:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2\,x + y^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2\,x\,y.$$

Logo

$$\frac{d}{dx}\,\psi(x,y(x)) = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = 2\,x + y^2 + 2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

Agora podemos integrar e obter:

$$\int \frac{d}{dx}\,\psi(x,y(x))\,dx = \int 0\,dx = c.$$

Isto é, $\psi(x,y(x)) = c$, equivalentemente:

$$x^2 + x\,y^2 = c$$

é solução geral da edo.

Definição 14. *Uma edo de primeira ordem do tipo:*

$$\boxed{M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0}$$

é dita **exata** *se existe uma função $\psi(x,y)$ tal que:*

$$M(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad e \qquad N(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Observação 8. *Como uma edo exata pode ser reescrita na forma*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

sua solução geral será dada por $\psi(x, y(x)) = c$. Isto é, a solução geral de uma edo exata é formada pelas curvas de nível da função $\psi(x,y)$.

Agora é conveniente fazermos as seguintes perguntas:

1. Como identificar uma edo exata?
2. Se a edo é exata, como determinar ψ?

Teorema 2. *Sejam $M,\ N : I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^2, onde I_i são intervalos abertos. A edo:*

$$M(x,y) + N(x,y)\,\frac{dy}{dx} = 0$$

é exata se e somente se:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \tag{3.22}$$

para todo $(x,y) \in I_1 \times I_2$.

Observação 9. *Notee que esta condição nada mais é do que exigir a igualdade das derivadas mistas de ψ. (Teorema de Schwarz).*

Se a seguinte edo é exata:

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.23}$$

tal que as funções M e N satisfazem as hipóteses do Teorema 2. Pela Observação 8, para resolver a edo (3.23), basta determinarmos a função $\psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y).$$

Integrando a primeira igualdade acima com respeito a x, obtemos:

$$\psi(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y).$$

Para determinarmos $g(y)$, derivamos ψ com respeito a y e usar a segunda igualdade que a função ψ deve satisfazer:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) + \frac{d}{dy}\,g(y) = \frac{\partial\psi}{\partial y} = N(x,y).$$

Logo, para determinarmos $g(y)$, basta resolvermos a edo:

$$\frac{dg}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big). \tag{3.24}$$

Uma condição necessária para que esta edo tenha solução é que o lado direito de (3.24) não dependa de x. Para verificar que isto ocorre, vamos derivar lado direito de (3.24) com respeito a x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\Big) &= \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big)\\ &= \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\end{aligned}$$

Como a edo (3.23) é exata, pelo Teorema 2, temos que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Logo, obtivemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\Big) = 0.$$

Isto é, o lado direito de (3.24) depende somente de y. Resolvendo a edo (3.24), obtemos:

$$g(y) = \int\Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\Big)\,dy$$

e ψ é dada por:

$$\begin{aligned}\psi(x,y) &= \int M(x,y)dx + g(y)\\ &= \int M(x,y)dx + \int\Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\Big)\,dy.\end{aligned}$$

Exemplo 28. *Considere a seguinte edo:*

$$\frac{2x}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.25}$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6\,x}{y^4} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6\,x}{y^4},$$

pelo Teorema 2, a edo (3.25) é exata. Logo, existe $\psi(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) = \frac{2\,x}{y^3} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y) = \frac{y^2 - 3\,x^2}{y^4}$$

e a solução geral da edo (3.25) é dada por $\psi(x, y) = c$. Vamos determinar $\psi(x, y)$, integrando em relação a x:

$$\psi(x, y) = \int \frac{2\,x}{y^3}\,dx + g(y) = \frac{x^2}{y^3} + g(y).$$

Derivando a expressão acima com respeito a y e usando que $\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y)$, temos:

$$N(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{y^3} + g(y)\right) = -\frac{3\,x^2}{y^4} + \frac{dg}{dy}.$$

Logo,

$$\frac{dg}{dy} = N(x, y) + \frac{3x^2}{y^4} = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} + \frac{3x^2}{y^4} = \frac{1}{y^2}$$

Uma solução da edo acima é: $g(y) = -\dfrac{1}{y}$; logo, $\psi(x, y) = \dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{y}$ e:

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$$

é uma solução geral da edo exata (3.25).

3.6.1 Fator Integrante

Exemplo 29. *Considere a seguinte edo:*

$$3\,x\,y + y^2 + (x^2 + x\,y)\,\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.26}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial y}(3\,x\,y + y^2) = 3\,x + 2\,y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + x\,y) = 2\,x + y,$$

então a edo não é exata.
Vamos tentar encontrar um fator integrante $\mu(x)$, tal que:

$$\mu(x)(3\,x\,y + y^2) + \mu(x)(x^2 + x\,y)\,\frac{dy}{dx} = 0$$

seja exata. A condição necessária e suficiente, dada pelo Teorema 2, para que uma edo seja exata, se:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x)\,(3\,x\,y + y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\,(x^2 + x\,y)\right).$$

Derivando, obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\mu(x)\right)(3\,x\,y + y^2) + \mu(x)\,\frac{\partial}{\partial y}(3\,x\,y + y^2) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mu(x)\right)(x^2 + x\,y)\mu(x)\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + x\,y);$$

logo,

$$\mu(x)(3\,x + 2\,y) = \frac{d\mu}{dx}(x^2 + x\,y) + \mu(x)(2\,x + y)$$

Isto é, um fator integrante dependendo somente de x, se existir, deve satisfazer:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{x + y}{x^2 + x\,y}\,\mu = \frac{x + y}{x\,(x + y)}\,\mu = \frac{1}{x}\,\mu$$

Resolvendo a edo de variáveis separáveis acima, temos que:

$$\mu(x) = x$$

é um fator integrante. Multiplicando a edo por μ:

$$x\,(3\,x\,y + y^2) + x\,(x^2 + x\,y)\,\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.27}$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3\,x^2\,y + x\,y^2) = 3\,x^2 + 2\,x\,y \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + x^2\,y) = 3\,x^2 + 2\,x\,y,$$

o Teorema 2 garante que a edo (3.27) é exata. Isto é, o fator integrante μ tornou a edo (3.26) exata. Uma solução geral da edo (3.27) é:

$$x^3\,y + \frac{x^2\,y^2}{2} = \psi(x, y) = c.$$

A solução acima também nos dá uma solução geral da edo (3.26) (Por quê?).

3.6.2 Determinação do Fator Integrante

Suponha que a edo:

$$M(x,y) + N(x,y)\,\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.28}$$

não é exata.
Queremos determinar um fator integrante $\mu(x,y)$ que a torne exata. Isto é, procuramos $\mu = \mu(x,y)$ tal que a edo:

$$\mu(x,y)\,M(x,y) + \mu(x,y)\,N(x,y)\,\frac{dy}{dx} = 0$$

seja exata.
Supondo que estamos nas condições do Teorema 2, devemos ter

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(x,y)\,M(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(x,y)\,N(x,y)\Big)$$

Derivando a expressão acima:

$$M\,\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\,\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{3.29}$$

A equação acima é uma equação diferencial parcial de primeira ordem que não sabemos resolver. No entanto, se supusermos que μ é função apenas de uma variável, poderemos achar a solução, de fato:
1. Se $\mu = \mu(x)$, temos $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ e de (3.29):

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{1}{N}\,\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{3.30}$$

2. Se $\mu = \mu(y)$, temos $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ e de (3.29):

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{M}\,\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{3.31}$$

Em cada um desses casos, teremos uma edo de variáveis separáveis que pode ser resolvida se

1. o lado direito de (3.30) depender somente de x.

2. o lado direito de (3.31) depender somente de y.

Exemplo 30. *Considere a edo:*

$$x^2 - y^2 + 2\,x\,y\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.32}$$

Verifique que $\dfrac{1}{x^2}$ é fator integrante e que $x + \dfrac{y^2}{x} = c$ é a solução geral da edo.

3.7 Edo's Homogêneas

Definição 15. *Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau n se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y), \quad \forall (x,y) \in A.$$

Exemplo 31. $f(x,y) = x^4 + x^3 y$ *é homogênea de grau* 4.

Exemplo 32. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ *é homogênea de grau* 1.

Exemplo 33. $f(x,y) = x^2 + \mathrm{sen}(x)\cos(y)$ *não é homogênea.*

Definição 16. *Uma equação diferencial da forma (3.28) é denominada homogênea quando $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são funções homogêneas de mesmo grau.*

Exemplo 34. *A edo:*

$$x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

é homogênea, pois $M(x,y) = x^2 - y^2$ e $N(x,y) = 2\,x\,y$ são funções homogêneas de grau 2.

Exemplo 35. *A edo:*

$$(x^2 + y^2) + (x\,y^2 + y^3)\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

não é homogênea, pois $M(x,y) = x^2 + y^2$ é homogênea de grau 2 e $N(x,y) = x\,y^2 + y^3$ é homogênea de grau 3. Como o grau não é o mesmo, a equação não é homogênea

Observação 10. *Seja $f(x,y)$ homogênea de grau n. Fixemos $(x,y) \in Dom(f)$ tal que $x \neq 0$, consideremos $\lambda = \dfrac{1}{x}$, temos:*

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\,x, \frac{1}{x}\,y\right) = \frac{1}{x^n}\,f(x,y) = \frac{f(x,y)}{x^n} \tag{3.33}$$

Vamos usar esta propriedade para resolver equações homogêneas. Consideremos a edo:

$$M(x,y) + N(x,y)\,\frac{dy}{dx} = 0$$

com M e N funções homogêneas de grau n.

Podemos reescrevê-la como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{\dfrac{M(x,y)}{x^n}}{\dfrac{N(x,y)}{x^n}}.$$

Usando 3.33, temos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M\left(1,\dfrac{y}{x}\right)}{N\left(1,\dfrac{y}{x}\right)} = F\left(1,\frac{y}{x}\right).$$

Isto é, o lado direito da equação é uma função que depende do quociente $\dfrac{y}{x}$. Consideremos a mudança de variável:

$$v = \frac{y}{x} \qquad \text{ou, equivalentemente,} \qquad y = v\,x.$$

Derivando esta relação, temos: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}\,x + v$. Logo

$$\frac{dv}{dx}\,x + v = \frac{dy}{dx} = -\frac{M\left(1,\dfrac{y}{x}\right)}{N\left(1,\dfrac{y}{x}\right)} = -\frac{M\,(1,v)}{N\,(1,v)}.$$

Isto é, obtivemos a edo de **variáveis separáveis**:

$$\boxed{\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}\left(\frac{M\,(1,v)}{N\,(1,v)} + v\right)}$$

Exemplo 36. *Considere a edo:*

$$(x^2 - y^2) - 2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.34}$$

Como:

$$M(\lambda\, x, \lambda\, y) = (\lambda\, x)^2 - (\lambda y)^2 = (\lambda^2\, x^2 - \lambda^2\, y^2) = \lambda^2\, (x^2 - y^2) = \lambda^2\, M(x, y)$$

e

$$N(\lambda\, x, \lambda\, y) = 2\, (\lambda\, x)\, (\lambda\, y) = \lambda^2\, 2\, x\, y = \lambda^2\, N(x, y),$$

(3.34) é uma edo homogênea.

Reescrevendo a edo (3.34), temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2}}{\dfrac{2xy}{x^2}} = \frac{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2\left(\dfrac{y}{x}\right)}$$

Fazendo a mudança de variável $v = \dfrac{y}{x}$, obtemos

$$\frac{dv}{dx}\, x + v = \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2\left(\dfrac{y}{x}\right)} = \frac{1 - v^2}{2\, v},$$

$$\frac{dv}{dx}\, x = \frac{1 - v^2}{2\, v} - v = \frac{1 - 3\, v^2}{2\, v};$$

ou seja,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{1 - 3v^2}{2v}\right).$$

A solução geral desta edo de variáveis separáveis é:

$$(1 - 3\, v^2)\, x^3 = c.$$

Voltando às variáveis originais:

$$\left(1 - 3\, \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\, x^3 = (1 - 3\, v^2)\, x^3 = c.$$

Isto é, $x^3 - 3\, y^3\, x = c$ é uma solução geral da edo (3.34).

Observação 11. *Se tivermos uma edo da forma*

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{M(x, y)}{N(x, y)}\right) \tag{3.35}$$

e as funções com M e N forem homogêneas de grau n, podemos reescrevê-la como

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{M(x,y)}{N(x,y)}\right) = F\left(\frac{\dfrac{M(x,y)}{x^n}}{\dfrac{N(x,y)}{x^n}}\right).$$

Usando 3.33, temos:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{M\left(1, \dfrac{y}{x}\right)}{N\left(1, \dfrac{y}{x}\right)}\right) = G\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Isto é, o lado direito da equação é uma função que depende do quociente $\dfrac{y}{x}$. Consideremos a mudança de variável:

$$v = \frac{y}{x} \qquad \text{ou, equivalentemente,} \qquad y = v\,x.$$

Argumentando como no caso das edo's Homogêneas, obtemos

$$\frac{dv}{dx}x + v = \frac{dy}{dx} = G(1,v)$$

Isto é, obtivemos a edo de **variáveis separáveis***:*

$$\boxed{\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\Big(G(1,v) - v\Big)}$$

As edo's que podem ser escritas na forma (3.35) são chamadas de edo's Redutíveis a edo's Homogêneas.

3.8 Edo's Redutíveis

Analisaremos agora as edo que podem ser escritas na forma:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{3.36}$$

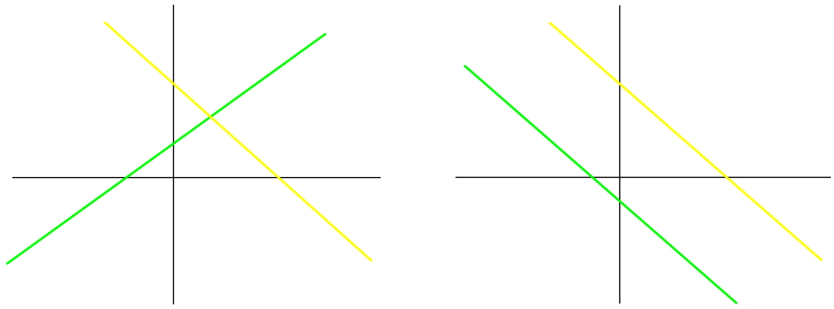
onde $a_i,\, b_i,\, c_i \in \mathbb{R}$, ($i = 1,\, 2$).

Observação 12. *Se $c_1 \neq 0$ ou $c_2 \neq 0$, a edo (3.36) não é homogênea.*

Consideremos as retas:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

determinadas pelo numerador e pelo denominador do argumento da função F em (3.36).



Analisaremos dois casos:

3.8.1 Redutíveis a Homogêneas

Se as retas são concorrentes, então

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

Denotemos por (α, β) a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

e consideremos a mudança de variável:

$$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases} \tag{3.37}$$

Podemos reescrever a edo (3.36) na forma

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{du} = \frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = F\left(\frac{a_1(u+\alpha) + b_1(v+\beta) + c_1}{a_2(u+\alpha) + b_2(v+\beta) + c_2}\right)$$

$$= F\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2u + b_2v + a_2\beta + b_2\beta + c_2}\right) = F\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right);$$

pois (α, β) é solução do sistema linear. Isto é, obtivemos a seguinte edo homogênea:

$$\frac{dv}{du} = F\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right).$$

Observação 13. *A mudança de variável (3.37) corresponde a consideramos um novo eixo de coordenadas uv cuja origem se localiza no ponto de coordenadas $(x, y) = (\alpha, \beta)$. Nas novas variáveis u e v o lado direito de (3.36) será uma função homogênea de grau zero.*

Exemplo 37. *Seja a edo:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3y - 1}{3x + y - 2} \tag{3.38}$$

Consideremos o sistema linear

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Temos

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 2 + 9 = 11 \neq 0$$

e a solução do sistema é dada por $\left(\frac{7}{11}, \frac{1}{11}\right)$. Fazendo a mudança de variável

$$x = u + \frac{7}{11} \qquad \text{e} \qquad y = v + \frac{1}{11},$$

temos,

$$\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx} = \frac{2\,x - 3\,y - 1}{3\,x + y - 2} = \frac{2\left(u + \frac{7}{11}\right) - 3\left(v + \frac{1}{11}\right) - 1}{3\left(u + \frac{7}{11}\right) + v + \frac{1}{11} - 2} = \frac{2\,u - 3\,v}{3\,u + v}.$$

Isto é,

$$\frac{dv}{du} = \frac{2\,u - 3\,v}{3\,u + v}.$$

A solução geral da edo homogênea acima é:

$$u^2\left(2 - \frac{6v}{u} - \frac{v^2}{u^2}\right) = c$$

desfazendo a mudança de variável $x = u + \frac{7}{11}$ e $y = v + \frac{1}{11}$, obtemos:

$$2\,(11\,x - 7)^2 - 6\,(11\,y - 1)\,(11\,x - 7) - (11\,y - 1)^2 = c$$

é solução geral da edo (3.38).

3.8.2 Redutíveis a Variáveis Seraravéis

Se as retas são paralelas, então

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = 0$$

No caso de retas paralelas coincidentes, já sabemos resolver a edo (3.36). Se as retas são paralelas não coincidentes, temos

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = m \neq \frac{c_2}{c_1}.$$

Isto é:

$$a_2 = m\, a_1 \qquad \text{e que} \qquad b_2 = m\, b_1.$$

Logo, podemos reescrever a equação na forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{m(a_1x + b_1y) + c_2}\right).$$

Considerando a mudança de variável:

$$v(x) = a_1\, x + b_1\, y, \qquad \text{logo} \qquad \frac{dv}{dx} = a_1 + b_1\, \frac{dy}{dx},$$

e obtemos uma edo de variáveis separáveis para v:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= a_1 + b_1\frac{dy}{dx} = a_1 + b_1 F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \\ &= a_1 + b_1 F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{m(a_1x + b_1y) + c_2}\right) \\ &= a_1 + b_1 F\left(\frac{v + c_1}{mv + c_2}\right) \end{aligned}$$

Exemplo 38. *Considere a edo:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,x - y + 1}{6\,x - 3\,y - 1}. \tag{3.39}$$

Logo:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = 0$$

Fazendo a mudança de variável para $a_1 = 2$ e $b_1 = -1$:

$$v(x) = 2\,x - y; \qquad \text{logo,} \qquad \frac{dv}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx},$$

então:

$$\frac{dv}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{2\,x - y + 1}{6\,x - 3\,y - 1} = 2 - \frac{2\,x - y + 1}{3\,(2\,x - y) - 1} = 2 - \frac{v + 1}{3\,v - 1}$$

$$= \frac{6\,v - 2 - v - 1}{3\,v - 1} = \frac{5\,v - 3}{3\,v - 1}.$$

Logo,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{5\,v - 3}{3\,v - 1}.$$

A solução geral desta edo é dada por:

$$\frac{3\,v}{5} + \frac{4}{25} \ln|5\,v - 3| = x + c$$

desfazendo a mudança de variável, obtemos: $v = 2\,x - y$

$$\frac{3\,(2\,x - y)}{5} + \frac{4}{25} \ln|5\,(2\,x - y) - 3| - x = c$$

é solução geral da edo (3.39).

3.9 Equação de Clairaut

Definição 17. *Uma equação é de Clairaut se é da forma:*

$$y = x\frac{dy}{dx} + \phi\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{3.40}$$

Observação 14. *Quando $\phi(z) = z$, temos que (3.40) é de variáveis separáveis*

Exemplo 39. *A edo:*

$$y = x\,\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

é de Clairaut. Aqui temos $\phi(z) = z^2$.

3.9.1 Determinação de Solução

Vamos introduzir um parâmetro auxiliar p:

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

A edo (3.40) pode ser reescrita na forma:

$$y = x\,p + \phi\,(p)\,. \tag{3.41}$$

Derivando a expressão acima em relaçãoo a x, obtemos:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,(x\,p + \phi\,(p)) = p + x\,\frac{dp}{dx} + \phi'\,(p)\,\frac{dp}{dx},$$

ou

$$(x + \phi'\,(p))\,\frac{dp}{dx} = 0.$$

Logo

$$x + \phi'\,(p) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dp}{dx} = 0.$$

A solução da segunda destas equações nos diz que $p(x) = c$. Usando a equação (3.41), vemos que a família de retas:

$$y(x) = x\,p + \phi\,(p) = c\,x + \phi(c)$$

é solução geral de (3.40).

Por outro lado, as possíveis soluções (necessariamente não-constantes) da edo $x + \phi'\,(p) = 0$ nos fornecem as seguintes soluções **singulares** da equação de Clairaut:

$$y(x) = x\,p(x) + \phi\,(p(x))\,.$$

Vamos resolver a equação de Clairaut do Exemplo 39:

$$y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \tag{3.42}$$

Fazendo $p = \dfrac{dy}{dx}$ a edo pode ser reescrita na forma:

$$y = x\,\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x\,p + p^2 \tag{3.43}$$

Derivemos a expressão acima em relação a x e lembremos que $p = \dfrac{dy}{dx}$. Temos:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\,p + \phi\,(p)\right) = p + x\,\frac{dp}{dx} + 2\,\frac{dp}{dx},$$

ou

$$(x + 2\,p)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Então:

$$x + 2p = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dp}{dx} = 0$$

Da edo $\dfrac{dp}{dx} = 0$ obtemos $p(x) = c$. Logo, por (3.43), a família de retas:

$$y(x) = c\,x + c^2$$

é solução geral de (3.42). Resolvendo $x + 2\,p = 0$, determinamos:

$$p(x) = -\frac{x}{2}.$$

Substituindo $p(x) = -\dfrac{x}{2}$ em (3.43), obtemos

$$y(x) = x\,p(x) + (p(x))^2 = -\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4},$$

solução singular da equação de Clairaut (3.42).

3.10 Equação de Lagrange

Definição 18. *Uma edo é de Lagrange se é da forma:*

$$y = x\,\psi\left(\frac{dy}{dx}\right) + \phi\left(\frac{dy}{dx}\right). \tag{3.44}$$

Observação 15. *Se $\psi(z) = z$, (3.44) é uma edo de Clairaut.*

Exemplo 40. *A edo:*

$$y = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

é de Lagrange, onde $\psi(z) = z^2$ e $\phi(z) = z^3$.

3.10.1 Determinação de Solução

Novamente, consideramos um parâmetro auxiliar p:

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

A edo (3.44) pode ser reescrita na forma:

$$y = x\,\psi\,\left(\frac{dy}{dx}\right) + \phi\,\left(\frac{dy}{dx}\right) = x\,\psi(p) + \phi\,(p)\,. \tag{3.45}$$

Derivando (3.45) com respeito a x, obtemos:

$$p = \frac{dy}{dx} = \psi(p) + (x\,\psi'(p) + \phi'(p))\,\frac{dp}{dx} \tag{3.46}$$

Observe que se $p = m$ é raiz de $p - \psi(p)$ então (3.46) é satisfeita e

$$y(x) = x\,\psi(m) + \phi(m)$$

é solução da edo de Lagrange (3.44). Considerando x como função de p e lembrando que:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dx}},$$

podemos reescrever (3.46) na forma:

$$(\psi(p) - p)\,\frac{dx}{dp} + \psi'(p)\,x + \phi'(p) = 0. \tag{3.47}$$

Seja $x(p)$ a solução geral da edo linear e $y(p)$ dado por (3.45). Então $(x(p), y(p))$ é a solução geral da equação de Lagrange (3.44) na forma paramétrica.
Vamos resolver a equação de Lagrange do Exemplo 40:

$$y = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \tag{3.48}$$

Fazendo $p = \dfrac{dy}{dx}$, obtemos:

$$y = x\,\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x\,p^2 + p^2. \tag{3.49}$$

Derivando com respeito a x:

$$p = \frac{dy}{dx} = p^2 + (2\,x\,p + 2\,p)\frac{dp}{dx} \tag{3.50}$$

Resolvendo $p - \psi(p) = 0$, achamos as raízes $p = 0$ e $p = 1$. Usando (3.49), encontramos as seguintes soluções de (3.48):

$$y(x) = 0 \quad \text{e} \quad y(x) = x + 1.$$

Determinemos agora a solução geral de (3.48). Considerando x como função de p, a partir de (3.50) obtemos a seguinte edo linear:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1-p}\,x = \frac{2}{1-p}$$

cuja solução geral é:

$$x(p) = -1 + \frac{c}{(1-p)^2}$$

Voltando à equação (3.49), obtemos a solução geral de (3.48) na forma paramétrica

$$\begin{cases} x(p) &= -1 + \dfrac{c}{(1-p)^2} \\ y(p) &= \dfrac{c\,p^2}{(1-p)^2} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro p das equações acimas:

$$\frac{y}{x+1} = p^2 = \frac{(\sqrt{c} + \sqrt{x+1})^2}{x+1}.$$

Logo,

$$y(x) = \left(c + \sqrt{x+1}\right)^2$$

é solução geral de (3.48). Note que a solução $y(x) = x+1$ pode ser deduzida da solução geral ($c = 0$); por outro lado a solução $y(x) = 0$ é uma solução singular de (3.48).

3.11 Exercícios

1. Determine a solução geral das edo's de variáveis separáveis:

a) $2z(3z+1)\dfrac{dw}{dz} + 1 - 2w = 0$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^{y}}$

c) $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{1+u^2}{1+v^2}$

d) $(1+y)x - (1+x)\dfrac{dy}{dx} = 0$

e) $xy(y+2) - (y+1)\dfrac{dy}{dx} = 0$

f) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$

2. Determine a solução geral das edo's lineares:

a) $\dfrac{ds}{dt} + s\cos t = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$

b) $\dfrac{dy}{dx} - y = -2e^{-x}$

c) $\dfrac{d\rho}{d\theta} + \rho \operatorname{tg}\theta = 0$

d) $\dfrac{ds}{dt} + \dfrac{s}{t} = \cos t + \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$

e) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

f) $x\dfrac{dy}{dx} + y = (1+x)e^{x}$

3. Determine a solução geral das edo's de Bernoulli:

a) $nx\dfrac{dy}{dx} + 2y = xy^{n+1}$

b) $3y^2y' - ay^3 - x - 1 = 0$

c) $y - y'\cos x = y^2\cos x(1 - \operatorname{sen} x)$

d) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = y^3$

e) $x\dfrac{dy}{dx} + y + x^2y^2 = 0$

f) $y' + xy = x^3y^3$

4. Observando que $y_1(x) = x$ é uma solução, resolva as seguintes equações de Ricatti:

a) $y' + y^2 = 1 + x^2$

b) $y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2$

5. Resolva a equação abaixo, sabendo que $y_1(x) = \operatorname{sen} x$ é uma solução.

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{cotg} x)y^2 \operatorname{cossec} x - y + \operatorname{sen} x$$

6. Determine a solução geral das edo's Exatas:

a) $2(3xy^2 + 2x^3) + 3(2x^2y + y^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$

b) $(x^3 + y^3) + 3xy^2\dfrac{dy}{dx} = 0$

c) $y-3x^2-(4y-x)\dfrac{dy}{dx}=0$

d) $\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y^2}{(x-y)^2}=0.$

e) $\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}+\left[\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right]\dfrac{dy}{dx}=0$

f) $(y^3-x)y'=y.$

7. Resolva as equações abaixo encontrando um fator integrante.

a) $(x^4+y^4)-xy^3\dfrac{dy}{dx}=0,\ x>0$

b) $(3x^2y+2xy+y^3)+(x^2+y^2)\dfrac{dy}{dx}=0$

c) $y+(2xy-e^{-2y})\dfrac{dy}{dx}=0$

d) $e^x+(e^x\operatorname{cotg}y+2y\operatorname{cossec}y)\dfrac{dy}{dx}=0$

e) $\dfrac{y}{x}+(y^3-\ln x)\dfrac{dy}{dx}=0,\ x>0$

f) $\cos^2 y\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y\cos x\dfrac{dy}{dx}=0$

g) $y^2+(xy+1)\dfrac{dy}{dx}=0$

h) $-(x^2+y^2)+xy\dfrac{dy}{dx}=0$

8. Determine a solução geral das edo's Homogêneas:

a) $3(5x+3y)+(11x+5y)\dfrac{dy}{dx}=0$

b) $3x+5y+(4x+6y)\dfrac{dy}{dx}=0.$

c) $x+4y+2x\dfrac{dy}{dx}=0.$

d) $x^2+y^2+(2xy+y^2)\dfrac{dy}{dx}=0.$

e) $x^2+3xy+y^2-x^2\dfrac{dy}{dx}=0.$

f) $2y-(2x-y)\dfrac{dy}{dx}=0.$

9. Determine a solução geral das edo's Redutíveis:

a) $x+2y+1-(2x+4y+3)\dfrac{dy}{dx}=0$

b) $(x+2y-4)-(2x+y-5)\dfrac{dy}{dx}=0$

c) $x+2y+1-(4x+8y+3)\dfrac{dy}{dx}=0$

d) $3y-7x+7-(3x-7y-3)\dfrac{dy}{dx}=0$

e) $x-2y+5+(2x-y+4)\dfrac{dy}{dx}=0.$

f) $3x-y+2+(9x-3y+1)\dfrac{dy}{dx}=0.$

10. Resolva as edo's de Clairaut e Lagrange:

a) $y=x+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3$

b) $y=xy'+y'$

c) $y=y(y')^2+2xy'$

d) $y=x\dfrac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

e) $3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2y=\left[2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3-1\right]x$

f) $y=xy'+\dfrac{1}{y'}$

11. Determine a solução geral das edo's:

a) $x(x+3)\dfrac{dy}{dx} - y(2x+3) = 0$

b) $\sqrt{1-4t^2}\dfrac{ds}{dt} + 2\sqrt{1-s^2} = 0$

c) $(ax+b)\dfrac{dy}{dx} - y^2 = 0, \quad a \neq 0$

d) $\dfrac{ds}{dt} - s\operatorname{cotg} t = e^t(1-\operatorname{cotg} t)$

e) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$

f) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

g) $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = 0$

h) $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = xy^3$

i) $x\dfrac{dy}{dx} - 3y = -2nx$

j) $\dfrac{ds}{dt} - s\operatorname{cotg} t = 1-(t+2)\operatorname{cotg} t$

k) $y' + 3y = x + e^{-2x}$

l) $\dfrac{ds}{dt} + s\operatorname{tg} t = 2t + t^2\operatorname{tg} t$

m) $(1+y\operatorname{sen} x) + (1-\cos x)\dfrac{dy}{dx} = 0$

n) $y' - \dfrac{n}{x}y = e^x x^n$

o) $\dfrac{dy}{dx} = y\operatorname{tg} x + \cos x$

p) $\dfrac{dx}{dt} - 6x = 10\operatorname{sen} 2t$

q) $2xy\dfrac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$

12. Ache a solução do problema de valor inicial dado, na forma explícita, e determine o intervalo no qual a solução é definida

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y+x^2y}, \qquad y(0) = -2$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{1+2y}, \qquad y(2) = 0$

13. Mostre que se a e λ forem constantes positivas e b um número real qualquer, então toda solução da equação $y' + ay = be^{-\lambda x}$ tem a propriedade $y \longrightarrow 0$ quando $x \longrightarrow \infty$.

Sugestão: Considere separadamente os caso $a = \lambda$ e $a \neq \lambda$.

14. (i) Mostre que $y_c(x) = ce^{-\int p(x)dx}$ é solução geral da equação linear homogênea
$$y' + p(x)y = 0.$$

(ii) Mostre que
$$y_p(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int \left(q(x)e^{\int p(x)dx}\right)dx\right]$$
é uma solução particular de $y' + p(x)y = q(x)$

(iii) Se $y_c(x)$ é qualquer solução geral da equação linear homogênea $y' + p(x)y = 0$ e $y_p(x)$ é qualquer solução particular da equação linear $y' + p(x)y = q(x)$, então mostre que $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ é uma solução geral da equação linear $y' + p(x)y = q(x)$.

15. Mostre que uma equação de Riccati com coeficientes constantes $y' + ay^2 + by + c = 0$ tem uma solução da forma $y = m$ se, e somente se, m é uma raiz da equação $am^2 + bm + c = 0$.

16. Empregue este resultado para encontrar a solução geral de:
(i) $y' + y^2 + 3y + 2 = 0$ (ii) $y' + y^2 - 2y + 1 = 0$

17. Determine o valor de A para que a solução $y(x)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} xy' + 3y = 5x^2 + 3, x > 0 \\ y(2) = A \end{cases} \quad \text{seja tal que} \quad \lim_{x \to 0^+} y(x) \quad \text{seja finito}$$

18. Determine a solução geral das equações abaixo:

a) $3x^2 + y^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx} = 0$

b) $x + 2y + 1 - (2x - 3)\dfrac{dy}{dx} = 0$

c) $y = x(y')^2 + (y')^2$

d) $y = xy' - \dfrac{1}{(y')^2}$

e) $2x^2 + y^2 + (2xy + 3y^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$

f) $y = 2xy' + (y')^2$

g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$

h) $y = xy' + \sqrt{1 - (y')^2}$

i) $(3e^{3x}y - 2x)dx + e^{3x}dy = 0$

j) $y = x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1$

k) $\left(\dfrac{y}{x} + 6x\right)dx + (\ln x - 2)dy = 0,\ x > 0$

l) $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

m) $\cos y + y\cos x + (\operatorname{sen} x - x\operatorname{sen} y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

n) $y' = -\dfrac{x^2 + y^2}{(2x + y)y}$

o) $x\cos\dfrac{y}{x}\left(y + x\dfrac{dy}{dx}\right) = y\operatorname{sen}\dfrac{y}{x}\left(x\dfrac{dy}{dx} - y\right)$

p) $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

q) $x + 2y + 1 - (4(x + 2y) + 3)\dfrac{dy}{dx} = 0$

r) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y - 3}{x - y - 1}$

s) $2x\dfrac{dz}{dx} - 2z = \sqrt{x^2 + 4z^2}$

19. Encontre o valor de b para o qual a equação dada é exata e, então, resolva-a usando esse valor de b.

$$(ye^{2xy} + x)dx + bxe^{2xy}dy = 0$$

20. Determine a solução geral das equações abaixo.

a) $2 + y - (3 - x)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

b) $\dfrac{ds}{dt}\cos t + s \operatorname{sen} t = 1.$

c) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = 2y^2.$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$

e) $y = xy' + y' - (y')^2.$

f) $x\dfrac{dy}{dx} - 2y + 3x = 0.$

g) $xy - (1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

h) $y' - a\dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}, \quad a \neq 0,\ a \neq 1.$

i) $3x + 2y + x\dfrac{dy}{dx} = 0.$

j) $\sqrt{1 + x^2}\dfrac{dy}{dx} - \sqrt{1 - y^2} = 0.$

k) $x - y - (x + y)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

l) $y + xy^2 - x\dfrac{dy}{dx} = 0.$

m) $x + 2y + 1 - (2x - 3)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

n) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 1 - 2x.$

a) $\dfrac{x}{(x+y)^2} + \dfrac{2x+y}{(x+y)^2}\dfrac{dy}{dx} = 0.$

b) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = e^x.$

c) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4} = \dfrac{2y}{x^3}\dfrac{dy}{dx}.$

d) $(1 - x^2)y' - xy - axy^2 = 0$

e) $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} - (1 - y^2) = 0.$

f) $y = (x + 1)(y')^2.$

g) $y = x\dfrac{dy}{dx} - \ln\dfrac{dy}{dx}.$

h) $y = 2x\dfrac{dy}{dx} - x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

i) $y = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{dx}\left(2x + \dfrac{dy}{dx}\right).$

j) $\dfrac{dy}{dx} = (y - 4x)^2$ sabendo que $y_1 = 4x + 2$ é solução da equação.

21. Mostre que as equações abaixo não são exatas, mas se tornam exatas quando multiplicadas, cada qual, pelo fator integrante sugerido. Resolva as equações exatas assim obtidas:

a) $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0, \qquad \mu(x,y) = \dfrac{1}{xy^3}$

b) $\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-x}\operatorname{sen} x\right)dx + \left(\dfrac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy = 0, \qquad \mu(x,y) = ye^x$

22. Mostre que qualquer equação separável

$$M(x) + N(y)y' = 0,$$

também é exata.

23. Mostre que, se $\dfrac{N_x - M_y}{xM - yN} = R$ onde R depende apenas da quantidade xy, então a equação diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tem um fator integrante da forma $\mu(xy)$. Encontre uma fórmula geral para esse fator integrante.

24. Use o resultado acima para resolver o seguinte problema

$$\left(3x + \frac{6}{y}\right) + \left(\frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

25. Considere a equação de Clairaut

$$y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$$

Mostre que a reta

$$y = Cx - \frac{1}{4}C^2$$

é tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(C/2, C^2/4)$. Explique por que isto implica que $y = x^2$ é solução singular da equação de Clairaut dada.