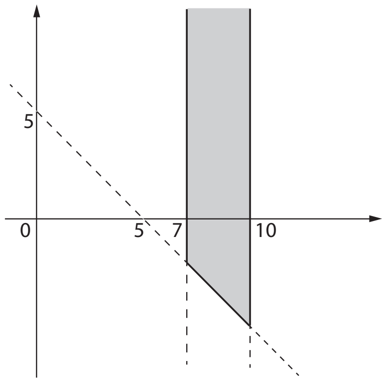
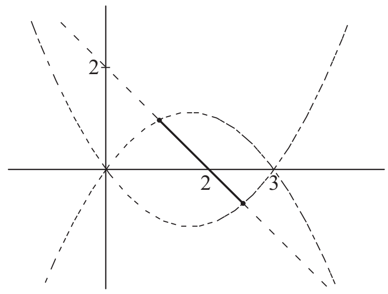
MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO G4 feito em 10 de dezembro de 2012 versão I

1ª **Questão**

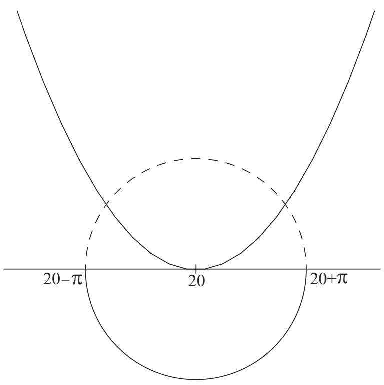


(a)



(b)

2ª **Questão**



(a) O gráfico de $y = (x-20)^2$ é uma parábola com vértice $(x_v, y_v) = (20, 0)$, já que, $\forall x, \quad y = (x-20)^2 \geq 0$ e $y = (x-20)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 20$.

Com isso, o centro é $(x_c, y_c) = (20, 0)$ e $\text{Dom}(f) = [x_c - \text{raio}, x_c + \text{raio}] = [20-\pi, 20+\pi]$ $\text{Im}(f) = [y_c - \text{raio}, y_c] = [-\pi, 0]$, pois o gráfico de f é o semicírculo inferior.

(b) Equação do círculo: $(x-20)^2 + (y-0)^2 = \pi^2$
Equação do semicírculo inferior:
$y = -\sqrt{\pi^2 - (x-20)^2}$
Resposta: $f(x) = -\sqrt{\pi^2 - (x-20)^2}$

3ª **Questão**

(a) Se $A = (a, 2\,a)$, então $B = (a+10, -(a+10)+15)$ e $2\,a = -(a+10)+15$, logo $3\,a = -10+15$, e assim $a = \frac{5}{3}$.

(b) Se $A = (a, 2\,a)$, então $B = (a+10, -(a+10)+15)$. Pelo item (a), sabemos que $a = \frac{5}{3}$, logo $B = \left(\frac{5}{3}+10, -(\frac{5}{3}+10)+15\right) = \left(\frac{35}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

4^a **Questão**

(a) Gráfico (d). Para satisfazer a condição (i), $f'(x)$ deve trocar de sinal, de negativo para positivo, em $x = 1$. Isto só ocorre com a função do gráfico (d).

(b) Gráfico (d). Para satisfazer a condição (ii), f' deve ser crescente em torno de $x = -2$. Isto só ocorre com a função do gráfico (d).

(c) Gráficos (b) e (d). Para satisfazer a condição (iii), f' deve possuir, pelo menos, 2 extremos locais. Isto só ocorre com as funções dos gráficos (b) e (d).

5^a **Questão**

(a) Observe que $f(x) = 7 \cdot u(x) + 12$, em que $u(x) = \text{sen}\left(\frac{10\,x}{3}\right)$. Assim, para determinarmos os valores de x nos quais f tem reta tangente horizontal, basta determinarmos os valores de x nos quais o gráfico de u tem reta tangente horizontal; já que o gráfico de u pode ser obtido do gráfico de f a partir de, somente, transformações verticais (expansão de 7 e translação de 12 unidades).

Para construir o gráfico de u, observe que seu período é $\dfrac{2\pi}{10/3} = \dfrac{3\pi}{5}$.

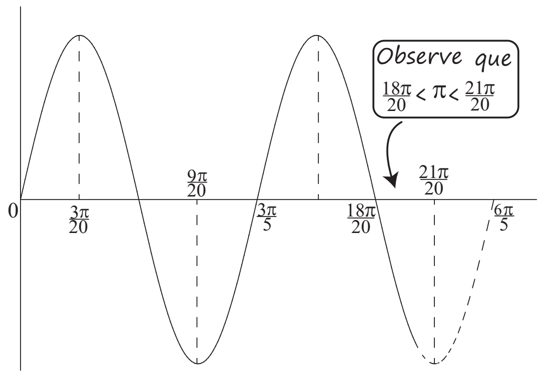


Gráfico de $u(x) = \text{sen}\left(\frac{10\,x}{3}\right)$

Analisando o gráfico de u no intervalo $[0, \pi]$, vemos que as retas tangentes são horizontas nos pontos de mínimo e máximo local de u (que não estão nos extremos do domínio), isto é, em

$$x = \frac{3\pi}{20} \quad \text{ou} \quad x = 3 \cdot \frac{3\pi}{20} \quad \text{ou} \quad x = 5 \cdot \frac{3\pi}{20}$$

(b) Aqui, novamente, usaremos o fato de que o gráfico de u pode ser obtido do gráfico de f a partir de, somente, expansão e translação verticais. Daí segue que os gráficos de f e de u são crescentes/decrescentes nos mesmos intervalos.

Pelo gráfico de u, construído no item (a), podemos afirmar que u é decrescente em torno de $x = 1$. Para isso, basta conferir que $1 \in \left(\dfrac{3\pi}{20}, \dfrac{9\pi}{20}\right)$. De fato:

$$3 < \pi < 4 \Rightarrow \frac{3\pi}{20} < \frac{3 \cdot 4}{20} < 1 < \frac{9 \cdot 3}{20} < \frac{9\pi}{20}.$$

Se u é decrescente em $\left[\dfrac{3\pi}{20}, \dfrac{9\pi}{20}\right]$ então f também o é. Dessa forma, podemos afirmar que a reta tangente ao gráfico de f, em $x = 1$, tem <u>inclinação negativa</u>.

A equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 7\,\text{sen}\left(\dfrac{10\,x}{3}\right) + 12$, em $x = 1$ é:

$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$ em que $f(1) = 7\ \text{sen}\left(\dfrac{10}{3}\right) + 12$ e $f'(1) = \dfrac{70}{3}\cos\left(\dfrac{10}{3}\right)$.

Ou seja, eq reta tangente: $y - \left[7\ \text{sen}\left(\dfrac{10}{3}\right) + 12\right] = \left[\dfrac{70}{3}\cos\left(\dfrac{10}{3}\right)\right] \cdot (x - 1)$.

Outra forma:

(a)

Procurar valores de $x \in [0, \pi]$ tais que $f'(x) = \dfrac{70}{3} \cos\left(\dfrac{10\,x}{3}\right) = 0$:

De forma geral,

$$\cos\left(\frac{10\,x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{10\,x}{3}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\,\pi}{20} + \frac{3\,\pi\,k}{10}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Para que $x \in [0, \pi]$, tomamos $k \in \{0, 1, 2\}$. Assim,

$$x \in \left\{\frac{3\,\pi}{20}, \frac{3\,\pi}{20} + \frac{3\,\pi}{10}, \frac{3\,\pi}{20} + \frac{6\,\pi}{10}\right\}.$$

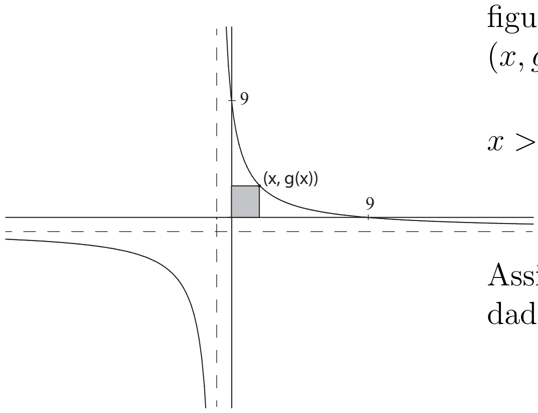
(b) Equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$:

$$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$$

$$y = \frac{70}{3} \cos\left(\frac{10}{3}\right) \cdot (x - 1) + 7 \operatorname{sen}\left(\frac{10}{3}\right) + 12.$$

Como $\frac{10}{3}$ está entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, temos que $\cos\left(\frac{10}{3}\right) < 0$, logo a reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ tem inclinação negativa.

6^a **Questão**



(a) O retângulo em questão é construído, conforme a figura ao lado. De acordo com o enunciado, o vértice $(x, g(x))$ deve ser tal que $x > 0$ e $g(x) > 0$.

$$x > 0 \quad \text{e} \quad g(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0 \quad \text{e} \quad \frac{10}{x+1} - 1 > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 < x < 9.$$

Assim, para cada $x \in (0, 9)$, a área do retângulo é dada por $f(x) = x \cdot g(x)$, isto é

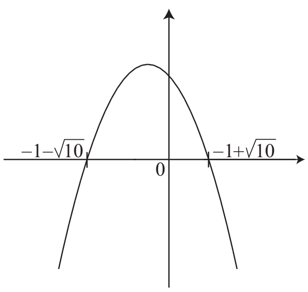
$$f(x) = x \cdot \left(\frac{10}{x+1} - 1 \right) = \frac{10\,x}{x+1} - x$$

(b) Queremos determinar o valor de x em que f assume máximo global. Para isso, estudaremos o sinal de f', no intervalo $(0, 9)$.

$$f(x) = \frac{10\,x}{x+1} - x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{10\,(x+1) - 10\,x}{(x+1)^2} - 1 = \frac{-x^2 - 2\,x + 9}{(x+1)^2}$$

Como $(x+1)^2 > 0$ para todo $x \in (0, 9)$, temos que o sinal de $f'(x)$ é determinado pelo sinal de $(-x^2 - 2\,x + 9)$.

Para estudarmos o sinal de $(-x^2 - 2\,x + 9)$, basta fazermos um esboço da parábola $y = -x^2 - 2\,x + 9$ e determinarmos suas raízes:



$$-x^2 - 2\,x + 9 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x = -1 - \sqrt{10} \quad \text{ou} \quad x = -1 + \sqrt{10}$$

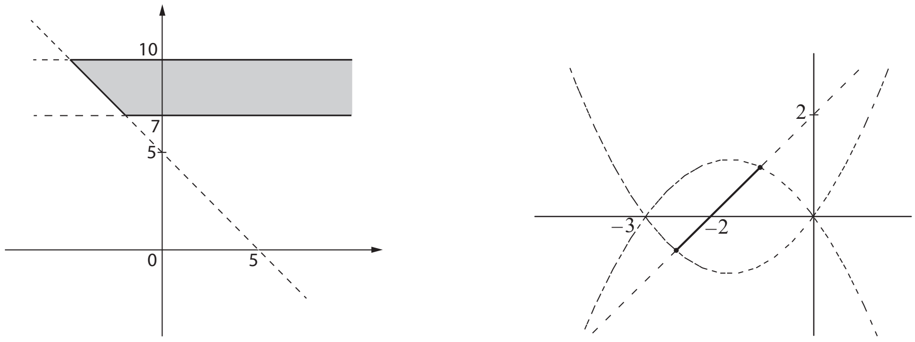
Como $0 < -1 + \sqrt{10} < 9$, temos que $f'(x) > 0$, se $0 < x < -1 + \sqrt{10}$ e $f'(x) < 0$, se $-1 + \sqrt{10} < x < 9$.

Assim, a função f é crescente em $(0, -1 + \sqrt{10}]$ e decrescente em $[-1 + \sqrt{10}, 9)$ e, portanto, assume máximo em $x = -1 + \sqrt{10}$.

MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

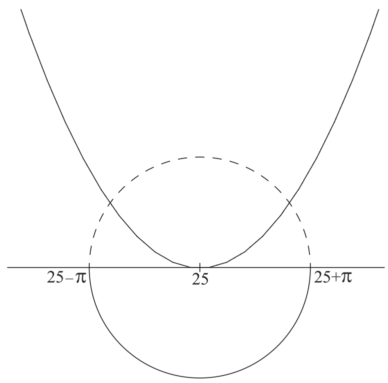
GABARITO RESUMIDO G4 feito em 10 de dezembro de 2012 versão II

1^a **Questão**



(a) (b)

2^a **Questão**



(a) O gráfico de $y = (x-25)^2$ é uma parábola com vértice $(x_v, y_v) = (25, 0)$, já que, $\forall x, \quad y = (x-25)^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad y = (x-25)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 25$.

Com isso, o centro é $(x_c, y_c) = (25, 0)$ e $\text{Dom}(f) = [x_c - \text{raio}, x_c + \text{raio}] = [25-\pi, 25+\pi]$ $\text{Im}(f) = [y_c - \text{raio}, y_c] = [-\pi, 0]$, pois o gráfico de f é o semicírculo inferior.

(b) Equação do círculo: $(x-25)^2 + (y-0)^2 = \pi^2$
Equação do semicírculo inferior:
$y = -\sqrt{\pi^2 - (x-25)^2}$
Resposta: $f(x) = -\sqrt{\pi^2 - (x-25)^2}$

3^a **Questão**

(a) Se $A = (a, 2\,a)$, então $B = (a+10, -(a+10)+14)$ e $2\,a = -(a+10)+14$, logo $3\,a = -10+14$, e assim $a = \frac{4}{3}$.

(b) Se $A = (a, 2\,a)$, então $B = (a+10, -(a+10)+14)$. Pelo item (a), sabemos que $a = \frac{4}{3}$, logo $B = \left(\frac{4}{3}+10, -(\frac{4}{3}+10)+14\right) = \left(\frac{34}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

4^a **Questão**

(a) Gráfico (d). Para satisfazer a condição (i), f' deve ser crescente em torno de $x = -2$. Isto só ocorre com a função do gráfico (d).

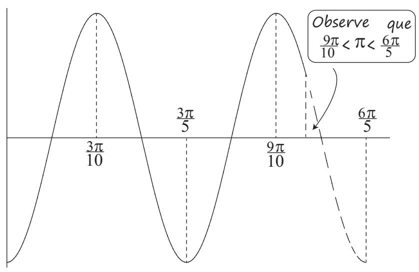
(b) Gráficos (b) e (d). Para satisfazer a condição (ii), f' deve possuir, pelo menos, 2 extremos locais. Isto só ocorre com as funções dos gráficos (b) e (d).

(c) Gráfico (d). Para satisfazer a condição (iii), $f'(x)$ deve trocar de sinal, de negativo para positivo, em $x = 1$. Isto só ocorre com a função do gráfico (d).

5^a **Questão**

(a) Observe que $f(x) = 7 \cdot u(x) + 12$, em que $u(x) = -\cos\left(\frac{10\,x}{3}\right)$. Assim, para determinarmos os valores de x nos quais f tem reta tangente horizontal, basta determinarmos os valores de x nos quais o gráfico de u tem reta tangente horizontal; já que o gráfico de u pode ser obtido do gráfico de f a partir de, somente, transformações verticais (expansão de 7 e translação de 12 unidades).

Para construir o gráfico de u, observe que seu período é $\dfrac{2\pi}{10/3} = \dfrac{3\pi}{5}$.



Analisando o gráfico de u no intervalo $[0, \pi]$, vemos que as retas tangentes são horizontas em

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{10} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{5} \quad \text{ou} \quad x = \frac{9\pi}{10}$$

Gráfico de $u(x) = -\cos\left(\frac{10\,x}{3}\right)$

(b) Aqui, novamente, usaremos o fato de que o gráfico de u pode ser obtido do gráfico de f a partir de, somente, expansão e translação verticais. Daí segue que os gráficos de f e de u são crescentes/decrescentes nos mesmos intervalos.

Pelo gráfico de u, construído no item (a), podemos afirmar que u é decrescente em torno de $x = 1$. Para isso, basta conferir que $1 \in \left(\dfrac{3\pi}{10}, \dfrac{3\pi}{5}\right)$. De fato:

$$3 < \pi < 3,2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3\pi}{10} < \frac{3 \cdot 3,2}{10} = \frac{9,6}{10} < 1 \quad \text{e} \quad 1 < \frac{9}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5} < \frac{3\,\pi}{5}$$

Se u é decrescente em $\left[\dfrac{3\pi}{10}, \dfrac{3\pi}{5}\right]$ então f também o é. Dessa forma, podemos afirmar que a reta tangente ao gráfico de f, em $x = 1$, tem <u>inclinação negativa</u>.

A equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = -7\cos\left(\dfrac{10\,x}{3}\right) + 12$, em $x = 1$ é: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$ em que $f(1) = -7\cos\left(\dfrac{10}{3}\right) + 12$ e $f'(1) = \dfrac{70}{3}\,\text{sen}\left(\dfrac{10}{3}\right)$.

Ou seja, eq reta tangente: $y - \left[-7\cos\left(\dfrac{10}{3}\right) + 12\right] = \left[\dfrac{70}{3}\,\text{sen}\left(\dfrac{10}{3}\right)\right] \cdot (x - 1)$.

Outra forma:

(a)

Procurar valores de $x \in [0, \pi]$ tais que $f'(x) = \dfrac{70}{3} \operatorname{sen}\left(\dfrac{10\,x}{3}\right) = 0$:

De forma geral,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{10\,x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{10\,x}{3}\right) = 0 + \pi k, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\,\pi\,k}{10}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Para que $x \in [0, \pi]$, tomamos $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Assim,

$$x \in \left\{0\,, \frac{3\,\pi}{10}, \frac{6\,\pi}{10}, \frac{9\,\pi}{10}\right\}.$$

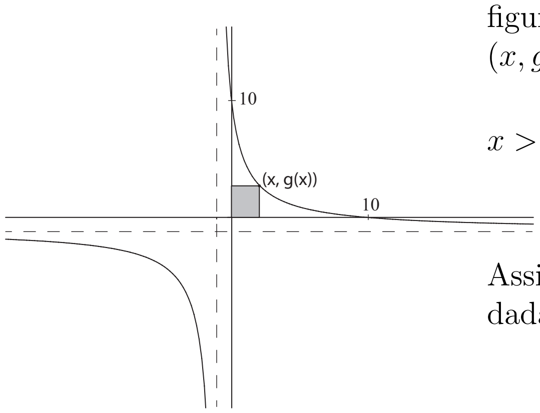
(b) Equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$:

$$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$$

$$y = \frac{70}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{10}{3}\right) \cdot (x - 1) - 7 \cos\left(\frac{10}{3}\right) + 12.$$

Como $\frac{10}{3}$ está entre π e $2\,\pi$, temos que $\operatorname{sen}\left(\frac{10}{3}\right) < 0$, logo a reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ tem inclinação negativa.

6^a **Questão**



(a) O retângulo em questão é construído, conforme a figura ao lado. De acordo com o enunciado, o vértice $(x, g(x))$ deve ser tal que $x > 0$ e $g(x) > 0$.

$$x > 0 \quad \text{e} \quad g(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0 \quad \text{e} \quad \frac{11}{x+1} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < x < 10.$$

Assim, para cada $x \in (0, 10)$, a área do retângulo é dada por $f(x) = x \cdot g(x)$, isto é

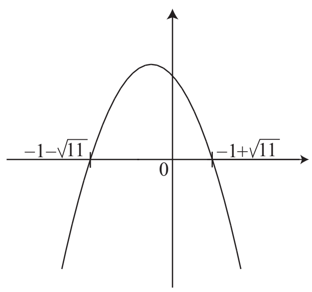
$$f(x) = x \cdot \left(\frac{11}{x+1} - 1 \right) = \frac{11\,x}{x+1} - x$$

(b) Queremos determinar o valor de x em que f assume máximo global. Para isso, estudaremos o sinal de f', no intervalo $(0, 10)$.

$$f(x) = \frac{11\,x}{x+1} - x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{11\,(x+1) - 11\,x}{(x+1)^2} - 1 = \frac{-x^2 - 2\,x + 10}{(x+1)^2}$$

Como $(x+1)^2 > 0$ para todo $x \in (0, 10)$, temos que o sinal de $f'(x)$ é determinado pelo sinal de $(-x^2 - 2\,x + 10)$.

Para estudarmos o sinal de $(-x^2 - 2\,x + 10)$, basta fazermos um esboço da parábola $y = -x^2 - 2\,x + 10$ e determinarmos suas raízes:



$$-x^2 - 2\,x + 10 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -1 - \sqrt{11} \quad \text{ou} \quad x = -1 + \sqrt{11}$$

Como $0 < -1 + \sqrt{11} < 10$, temos que $f'(x) > 0$, se $0 < x < -1 + \sqrt{11}$ e $f'(x) < 0$, se $-1 + \sqrt{11} < x < 10$.

Assim, a função f é crescente em $(0, -1 + \sqrt{11}]$ e decrescente em $[-1 + \sqrt{11}, 10)$ e, portanto, assume máximo em $x = -1 + \sqrt{11}$.