MAT1162 - Cálculo a Várias Variáveis I
Lista de Exercícios sobre Integração Dupla

1 Exercícios Complementares resolvidos

Exercício 1

Considere a integral iterada

$$I = \int_{y=0}^{1} \left[\int_{x=2y}^{2} \exp\left(-x^2\right)\, dx \right] dy.$$

1. Inverta a ordem de integração de I.
2. Calcule o valor de I.

Solução do Exercício 1

1. A região de integração é um triângulo de vértices (0,0), (2,0) e (2,1). Portanto

$$I = \int_{x=0}^{2} \left[\int_{y=0}^{x/2} \exp\left(-x^2\right) dy \right] dx.$$

2. Usando o item anterior,

$$I = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{2} x \exp\left(-x^2\right) dx = -\frac{1}{4} \exp\left(-x^2\right)\Big|_{x=0}^{2} = -\frac{1}{4}(1 - \exp\left(-4\right)).$$

Exercício 2

Dada uma função real f e um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$, o valor médio de f em D é definido como

$$\frac{1}{A(D)} \int \int_D f dA,$$

onde $A(D)$ é a área de D.

Sendo D um disco de raio R, calcule

1. O valor médio da distância ao centro de D.
2. O valor médio do quadrado da distância ao centro de D.

Solução do Exercício 2

1. Considerando um sistema de coordenadas cuja origem coincide com o centro de D, temos que a distância de um ponto ao centro é a coordenada polar r. Portanto
$$\int\int_D f dA = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} r.rdrd\theta = \frac{2\pi R^3}{3}.$$
Como a área do disco é πR^2, o valor médio procurado é $\frac{2}{3}R$.
2. Considerando um sistema de coordenadas cuja origem coincide com o centro de D, temos que o quadrado da distância de um ponto ao centro é r^2. Portanto
$$\int\int_D f dA = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} r^2.rdrd\theta = \frac{\pi R^4}{2}.$$
Como a área do disco é πR^2, o valor médio procurado é $\frac{1}{2}R^2$.

Exercício 3

Considere a função $f(x, y) = x$ e a região
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^4 \leq 16,\ x + 2y \geq 4\}.$$
Denote por L a integral dupla de f em R, ou seja,
$$L = \int\int_R x\ dA.$$

1. Escreva L como duas integrais iteradas, integrando primeiro em x e depois em y.
2. Escreva L como duas integrais iteradas, integrando primeiro em y e depois em x.
3. Calcule o valor de L.

Solução do Exercício 3

1.
$$L = \int_{y=0}^{2}\int_{x=4-2y}^{\sqrt{16-y^4}} x\ dxdy.$$
2.
$$L = \int_{x=0}^{4}\int_{y=\frac{4-x}{2}}^{(16-x^2)^{1/4}} x\ dydx.$$
3. Utilizando o item (a), temos que
$$L = \frac{1}{2}\int_{y=0}^{2}\left[16 - y^4 - (4-2y)^2\right] dy$$
$$L = \frac{1}{2}\int_{y=0}^{2}\left[-y^4 + 16y - 4y^2\right] dy = \frac{112}{15}.$$

Exercício 4

Considere a região

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ \exp(2x) - 1 \leq y \leq \exp(x),\ x \geq 0\}.$$

1. Esboce a região R, indicando o ponto de interseção (x_0, y_0) das curvas $y = \exp(x)$ e $y = \exp(2x) - 1$.
2. Calcule a integral de $f(x, y) = \exp(-x)$ em R.

Solução do Exercício 4

1. Igualando as equações temos $e^x = e^{2x} - 1$. Fazendo $t = e^x$, temos a equação do segundo grau

   $$t^2 - t - 1 = 0,$$

   cuja única solução positiva é $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Concluímos que

   $$(x_0, y_0) = \left(\ln\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right], \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

2. Temos que

   $$\begin{aligned} \int\int_R f(x, y)\ dA &= \int_{x=0}^{x_0} \int_{y=e^{2x}-1}^{e^x} e^{-x}\ dydx \\ &= \int_{x=0}^{x_0} \left(1 - e^x + e^{-x}\right)\ dx \\ &= x_0 + 2 - e^{x_0} - e^{-x_0}. \end{aligned}$$

   Substituindo o valor de x_0 obtido em (a) concluímos que

   $$\int\int_R f(x, y)\ dA = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}.$$

Exercício 5

Considere a função $f(x, y) = x$ e a região

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 1\}.$$

Denote por I a integral dupla de f em R, ou seja,

$$I = \int\int_R x\ dA.$$

1. Escreva I como duas integrais iteradas em coordenadas cartesianas.
2. Escreva I como duas integrais iteradas em coordenadas polares.
3. Calcule o valor de I.

Solução do Exercício 5

1. Temos
$$I = \int_{y=1}^{2} \int_{x=0}^{\sqrt{4-y^2}} x \; dxdy \tag{1}$$
ou
$$I = \int_{x=0}^{\sqrt{3}} \int_{y=1}^{\sqrt{4-x^2}} x \; dydx.$$
2. Escrevemos
$$I = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=\frac{1}{\sin(\theta)}}^{2} rcos(\theta) \cdot rdrd\theta.$$
3. Utilizando a fórmula (1) obtemos
$$I = \frac{1}{2} \int_{y=1}^{2} (4 - y^2) \; dy = \frac{5}{6}.$$

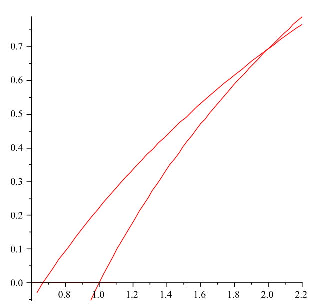
Exercício 6

Considere a região do plano
$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; y \geq \ln(x), \; y \leq \ln\left(\frac{3x+2}{4}\right) \right\}.$$

1. Faça um esboço de R indicando seus pontos mais significativos.
2. Encontre a área de R.

Solução do Exercício 6

1. O ponto de interseção das curvas é obtido resolvendo-se o sistema
$$\begin{cases} y = \ln(x) \\ y = \ln(\frac{3x+2}{4}). \end{cases}$$
Igualando as duas equações obtemos $x = 2, y = \ln(2)$.



2. A área de R é dada por

$$A = \int_{y=0}^{\ln(2)} \int_{x=\frac{4\exp(y)-2}{3}}^{\exp(y)} 1 dxdy = \int_{y=0}^{\ln(2)} \exp(y) - \frac{4\exp(y)-2}{3} dy$$

$$A = \frac{1}{3}\int_{y=0}^{\ln(2)} 2 - \exp(y) dy = \frac{2\ln(2)}{3} - \frac{1}{3}.$$

Exercício 7

1. Considere uma região R do plano tal que a integral dupla de uma função $f(x,y)$ nesta região possa ser escrita como

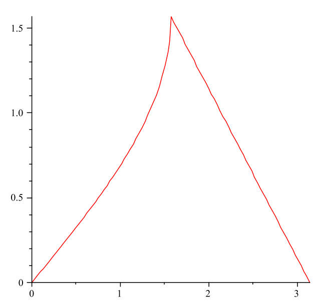
$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{y=0}^{\arcsin\left(\frac{2x}{\pi}\right)} f(x,y)dydx + \int_{x=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{y=0}^{\pi-x} f(x,y)dydx.$$

2. Descreva a integral de $f(x,y)$ em R como uma integral iterada, integrando primeiro em x e depois em y. (**Sugestão**: faça um esboço da região R.)
3. Calcule a área de R.

Solução do Exercício 7

1. Observando a região R temos que

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=\frac{\pi}{2}\sin(y)}^{\pi-y} f(x,y)dxdy$$



2. Considerando $f(x,y) = 1$ obtemos

$$A = \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=\frac{\pi}{2}\sin(y)}^{\pi-y} 1 dxdy = \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \pi - y - \frac{\pi}{2}\sin(y)dy = \frac{3}{8}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi.$$

Exercício 8

Considere a região R do plano descrita por

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

1. Esboce a região e calcule sua área.
2. Encontre as coordenadas do centróide de R.

Solução do Exercício 8

A região R é um quadrado de lado 1 menos um quadrante de disco de raio 1. Portanto sua área é $A = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Para a abcissa do centróide calculamos

$$Ix = \iint_R x\ dA.$$

A integral dupla no quadrado de lado 1 é

$$Ix1 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} x\ dydx = \frac{1}{2},$$

enquanto que a integral dupla no quadrante é

$$Ix2 = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} r\cos(\theta) \cdot\ rdrd\theta = \frac{1}{3}.$$

Segue que $Ix = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Portanto $\overline{x} = \frac{2}{3(4-\pi)}$. Como a figura é simétrica com relação a reta $y = x$, concluímos que $\overline{y} = \overline{x} = \frac{2}{3(4-\pi)}$.

Exercício 9

Considere a região do plano

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x \leq \sqrt{2},\ x \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}.$$

1. Faça um esboço de R e calcule sua área.
2. Descreva a integral dupla de $f(x,y) = y$ sobre R em coordenadas polares.
3. Encontre a ordenada $\overline{y}$ do centróide de R.

Solução do Exercício 9

A área de R é um oitavo da área do disco de raio 2. Portanto $A(R) = \frac{\pi}{2}$.
Em coordenadas polares, R é descrita por $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 2$. Portanto

$$\iint_R y\ dxdy = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{2} r\sin\theta \cdot rdrd\theta.$$

Usando as coordenadas polares

$$\iint_R y\ dxdy = \frac{8}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto $\overline{y} = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi}$.

2 Exercícios Complementares sem resolução

Exercício 10

Fazer os seguintes exercícios da seção 1.1.4 do livro *Cálculo Integral a Várias Variáveis* de M. Craizer e G. Tavares: 1(d), 1(f), 1(h), 1(i), 1(j). 2(b), 2(d)

Exercício 11

Fazer os seguintes exercícios da seção 2.1.4 do livro *Cálculo Integral a Várias Variáveis* de M. Craizer e G. Tavares: 1(b), 4(a), 4(b).

Exercício 12

Considere as curvas definidas implicitamente pelas equações cartesianas abaixo. Determine a equação *polar* destas, nos intervalos indicados, fazendo um desenho.

1. (Lemniscata de Bernoulli). $\left(x^2+y^2\right)^2 = x^2 - y^2$
   $(-\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$
2. (Limaçon de Pascal). $\left(x^2+y^2-x\right)^2 = x^2+y^2$
   $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$
3. (Cardióide) $\left(x^2+y^2\right)^2 - 2x(x^2+y^2) - y^2 = 0$
   $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$

Exercício 13

Considere a região R do plano xy cuja fronteira dada por $R := [1/2, 1] \times [1, 3]$. Calcule

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy$$

onde

1. $f(x,y) = -x \log x \cos(\pi y) \operatorname{sen}^2(\pi y)$
2. $f(x,y) = \dfrac{2y}{1+y^2}\, x\cos(\pi x)$
3. $f(x,y) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\dfrac{e^{-\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}$
4. $f(x,y) = 2xe^x \log y$
5. $f(x,y) = \dfrac{y^3+y^2-y}{y+1}\,\dfrac{1}{2x+10}$
6. $f(x,y) = e^y \operatorname{sen} y\, x^4 e^{-7x^5}$.
7. $f(x,y) = y\sqrt{y+1}\, \operatorname{sen} x\, \cos^2 x$.
   (Respostas (a): 0 (b): $-\log 5(1/(2\pi) + 1/\pi^2)$ (c): $2\sqrt{3}(e^{-1} - e^{-\sqrt{3}})$ (d): $(3\log 3 - 2)\sqrt{e}$
   (e): $(20/3 + \log 2)\log(12/11)/2)$

Exercício 14

Considere a região R do plano delimitada pelas parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = -x^2 + 9$.

1. Calcule a área de R (Resposta: 64/3).
2. Calcule o centróide de R (Resposta: 5).
3. Calcule o valor médio da função $f(x,y) = x^2$ em R (Resposta: 12/5).

Exercício 15

Em cada item do exercício anterior, interprete a integral dupla em termos de *volume de uma região U do espaço*, determinando rigorosamente U, usando inequações.

Exercício 16

Considere a regiões do plano $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, 1 \leqslant y \leqslant x^2+1,\, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ e $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, 1 \leqslant y \leqslant -x/3+7/3,\, 1 \leqslant x \leqslant 4\}$. Seja $R := R_1 \cup R_2$.

Considere a integral dupla: $I = \iint_R F(x,y)\,dxdy$

1. Esboce um desenho de R. Escreva, sem fazer cálculos, uma soma de duas *integrais iteradas*, usando integrais do tipo $\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} F(x,y)\,dydx$, que seja igual a I.
2. Escreva, sem fazer cálculos, uma *integral iterada*, usando integrais do tipo $\int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} F(x,y)\,dxdy$, que seja igual a I.
3. Calcule a área de R e calcule a coordenada $\overline{y}$ do centróide de R. *Resposta*: $A = \text{area}(R) = \frac{11}{6}, \overline{y} = 73/55$.

Exercício 17

Considere as regiões R_1, R_2 do plano dadas por:

$$\begin{aligned} R_1 =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\} \\ R_2 =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 - x^2 \leqslant y^2\} \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{R} := R_1 \cap R_2$.

Considere a integral dupla $I := \iint_{\mathcal{R}} \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy$.

1. Faça o desenho da região $\mathcal{R}$. Escreva, usando *coordenadas retangulares* x, y, sem fazer cálculos, uma *integral iterada*, que seja igual a I.
2. Escreva sem fazer cálculos, usando *coordenadas polares* uma fórmula, que seja igual a I.
3. Calcule I. *Resposta*: $\pi/4 - \sqrt{2}/2$.

Exercício 18

Seja $R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, 0 \leqslant x \leqslant y,\ x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1\}$.

1. Determine R usando coordenadas polares. Sug: esboce um desenho.
2. Escreva a integral dupla $I = \iint_R 4(x^2+y^2)\,dxdy$, *usando coordenadas polares*.
3. Use o MAPLE para calcular que $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 \theta d\theta = 3\pi/32 + 1/4$. Deduza que $I = 3\pi/2 + 4$

Exercício 19

Considere U a região sólida interior à esfera dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, que está também no interior do cilindro dado por $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

1. Determine U usando desigualdades e faça um desenho da região usando o MAPLE.
2. Calcule o volume de U (Resposta: $128\pi/3 + 512/9$).

Exercício 20

Considere a região A delimitada pelo cardióide dado em coordenadas polares por $r = 2 + \cos\theta$.

1. Calcule a área da região R obtida removendo-se de A o disco de raio $1/2$ centrado na origem e faça uma figura usando o MAPLE (Resposta: $4\pi + \pi/4$).

Exercício 21

Considere a região A delimitada pelo cardióide dado em coordenadas polares por $r = 1 + \cos\theta$.

1. Calcule a área da região R obtida removendo-se de A, a parte que está contida em A do disco de raio $1/2$ centrado na origem .

Exercício 22

Seja R_1 a região do plano dada em coordenadas polares por $0 \leqslant r \leqslant \operatorname{sen} 2\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Considere $R := R_1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \geqslant 3/4\}$.

1. Seja $I := \iint\limits_R F(x,y)dxdy$. Escreva I usando coordenadas polares. OBS: (Mini-tabela). $\operatorname{sen}\pi/4 = \cos\pi/4 = \sqrt{2}/2, \operatorname{sen}\pi/6 = \cos\pi/3 = 1/2$, $\operatorname{sen}\pi/3 = \cos\pi/6 = \sqrt{3}/2$.
2. Calcule a área de R. *Resposta*: $\text{area}(R) = -\pi/48 + \sqrt{3}/16$.

Exercício 23

Calcule I determinando as regiões de integração e interpretando o resultado

$$I = \int\limits_{x=0}^{2}\int\limits_{y=x}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx + \iint\limits_R \sqrt{1 - x^2 - y^2/4}\,dxdy$$

onde R é a região do plano dada por $x^2 + y^2/4 \leqslant 1$ (Resposta: $2\sqrt{2} - 2 + 2\pi/3$).

Exercício 24

Seja $R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2/4 + y^2/9 \leqslant 1\}$.

1. Calcule o volume da região U de $\mathbb{R}^3$ delimitada pelo gráfico da funções $z = x^2 + y^2 + 1$ e $z = 2xy$ restritas à região R (Resposta: $51\pi/2$).

Exercício 25

Considere as superfícies dadas abaixo. Determine: Interseção com os planos coordenados, xy, xz, yz.

Estude as interseções com os planos $z = c, c \in \mathbb{R}$, quando tais interseções forem círculos. Identifique as superfícies de revolução (e seus eixos). Explicite também os planos de simetria π das superfícies: Isto é, reflexão em π, deixa a superfície invariante, levando uma "metade" desta na outra "metade". Use o MAPLE para obter um desenho de cada superfície.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
2. $x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 1$.
3. $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ (hiperbolóide com 2 folhas).
4. $x^2 + z^2 - y^2 = -1$.
5. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (hiperbolóide com 1 folha.).
6. $(x-1)^2 + (y+1)^2 - (z-3)^2 = -1$.
7. $x^2 + y^2 + z^2/4 = 1$.
8. $x^2 + y^2 = 9z^2$.
9. $x^2 + z^2 = 9y^2$.
10. $x^2 - y^2 = z$.
11. $z = xy$ (Sela.).
12. $\cosh z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (catenóide). Lembrete: $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$.
13. $z = \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$. Procure encontrar um cilindro para o qual a superfície "converge" quando $z \to \infty$.
14. $z = \log\left(\dfrac{\cos y}{\cos x}\right)$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\pi/2 < y < \pi/2$ (Superfície de Scherk).

Exercício 26

Considere as superfícies D, D_1 e S_1 definidas a seguir (esboce um desenho) :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leqslant 9,\ z = 0\}$$
$$D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x + y + 7,\ x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$
$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leqslant z \leqslant x + y + 7,\ x^2 + y^2 = 9\}$$

Considere $S := D \cup S_1 \cup D_1$ a superfície fechada, que é fronteira de um sólido $U \subset \mathbb{R}^3$.

1. Desenhe corretamente S.
2. Escreva o volume de U usando coordenadas retangulares. Escreva o volume de U usando coordenadas polares.
3. Calcule $\displaystyle\iint_D (x + y + 7)\left[\frac{2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} + \frac{1}{10}\right] dxdy$. *Resposta*: $189\pi/10$. *Sugestão*: Use coordenadas polares.

Exercício 27

Considere as regiões U_1, U_2 do espaço dadas por:

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leqslant z \leqslant 9 - x^2 - y^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant y\}$$
$$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leqslant z \leqslant 9 - (x-1)^2 - (y-3)^2\}$$

1. Escreva o *volume* V_1 da região U_1 usando integrais iteradas, via coordenadas cartesianas ou retangulares usuais x, y.
2. Escreva o *volume* V_1 da região U_1, usando coordenadas polares e *calcule* V_1.
3. Calcule o volume V_2 de U_2. *Resposta*: $V_1 = 81\pi/16$, $V_2 = 81\pi/2$. Sugestão: use os itens precedentes.

Exercício 28

Considere a região U do espaço dada por $U := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leqslant z \leqslant y^2 + x;\ 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{sen} x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$.

1. Escreva o volume de U usando uma *integral iterada nas variáveis* x, y.
2. Calcule o volume de U. *Resposta*: Volume$(U) = 4/9 + \pi$.
3. Seja $W := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leqslant z \leqslant y^2 + x;\ -\operatorname{sen} x \leqslant y \leqslant \operatorname{sen} x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$. Calcule o volume de W. *Sug*: Faça o mínimo de contas possível, justificando corretamente a sua resposta.

Exercício 29

Considere a região $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leqslant \sqrt{2}\}$. Seja A o número real positivo determinado pela integral dupla : $A = \iint_R \left[4 - (x^2+y^2)^4\right]\, dxdy$. Calcule as seguintes integrais duplas em *termo* de A. Não é preciso calcular A, mas é preciso dar uma justificativa matemática correta.

1. Usando desigualdades, determine $U \subset \mathbb{R}^3$ tal que $A = $ Volume(U).
   Calcule $I_1 = \iint\limits_{R_1} \left[4 - \left((x-1)^2 + (y+1)^2\right)^4\right] dxdy$, onde, $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + (y+1)^2 \leqslant \sqrt{2}\}$. Justifique sua resposta.
2. $I_2 = \iint\limits_{R_2} \left[4 - (x^2+y^2)^4\right] dxdy$, onde $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leqslant \sqrt{2},\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$. Justifique sua resposta.
3. $I_3 = \iint\limits_{R} \left[7 - (x^2+y^2)^4\right] dxdy$. Justifique sua resposta.
4. Agora, usando o MAPLE, calcule A.

Exercício 30

Determine o volume do sólido delimitado pelos parabolóides $z = 4x^2 + 2y^2$ e $z = 12 + x^2 - y^2$. Idem com respeito aos parabolóides $z = x^2 + 3y^2$ e $z = 4 - y^2$ (Respostas: 24π e 4π).

Exercício 31

Seja $V := 8 \int\limits_{x=0}^{4} \int\limits_{y=0}^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{16 - x^2}\, dydx.$

1. Interprete V como sendo o volume de uma certa região do espaço delimitada por dois cilindros.
2. Usando o MAPLE, faça uma figura.
3. Calcule V (Resposta: $1024/3$).