MAT1162 - Monitoria - 14 de Fevereiro de 2014

Descrição de regiões planas

---

1. Sejam $a, b > 0$ duas constantes reais.

A) Mostre que a curva

$E(a,b) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ (elipse de semi-eixos a e b, centrada na origem)

é igual a $E^+(a,b) \cup E^-(a,b)$, onde

$$E^+(a,b) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \ y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, -a \leq x \leq a\right\},$$

$$E^-(a,b) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \ y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, -a \leq x \leq a\right\}.$$

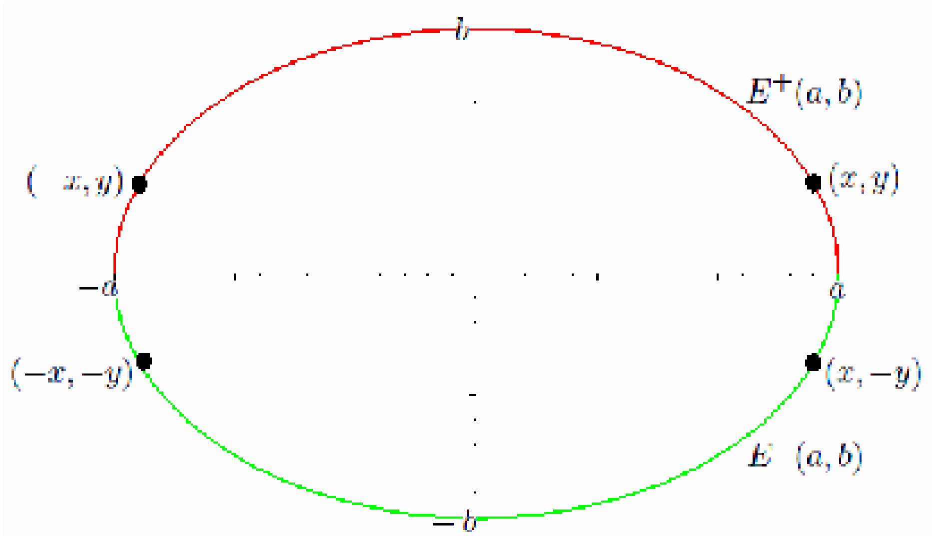
B) Usando as técnicas de Cálculo I, desenhe os gráficos $E^+(a,b)$ e $E^-(a,b)$ das funções

$$f^+(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \qquad (-a \leq x \leq a)$$

$$f^-(x) = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \qquad (-a \leq x \leq a).$$

C) Note que a elipse é simétrica com respeito aos eixos x e y, ou seja,

$(x,y) \in E(a,b) \Leftrightarrow (\pm x, \pm y) \in E(a,b).$



---

2. Sejam $a, b > 0$ duas constantes reais.

Considere a hipérbole de assíntotas $y = \pm \dfrac{b}{a} x$:

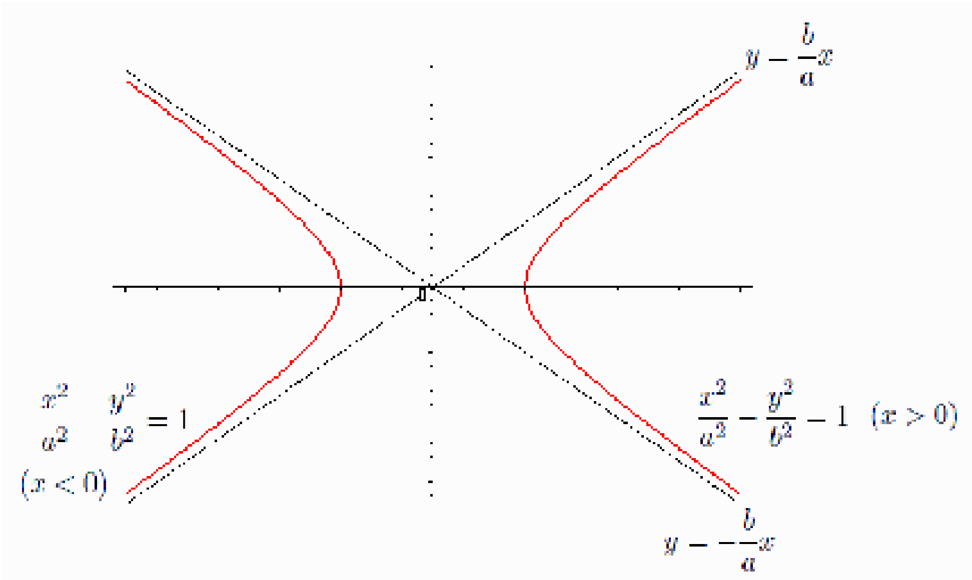
$$H(a,b) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

A) Nos moldes do exercício anterior, trace os dois ramos desta hipérbole.

Dica: $x = \pm\, a \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{b^2}}$ (cada um dos ramos da hipérbole é um gráfico horizontal sobre todo o eixo y).

B) Discutir "intuitivamente" a existência das duas assíntotas.

Dica: Verifique o que acontece quando y é muito grande nas equações $x = \pm\, a \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{b^2}}$.



---

3. Seja $R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ sen(x) \le y \le \cos(x) \right\}$.

A) Esboce a fronteira e o interior de R, separadamente.
B) Descreva a fronteira de R através de equações e inequações cartesianas.
C) Descreva a região R nos dois formatos a seguir:

$R = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le \mathrm{b},\ \mathrm{f}(x) \le y \le \mathrm{g}(x) \}$ (Tipo I)

$R = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{c} \le \mathrm{y} \le \mathrm{d},\ \mathrm{h}(y) \le x \le j(y) \}$ (Tipo II)

explicitando $a, b, c, d, f, g, h,\ j$.

D) Forneça a equação de uma elipse de centro (x_o, y_o) que esteja inteiramente contida no **interior**da região R(é necessário explicitar (x_o, y_o), assim como os semi-eixos da elipse). Verifique sua resposta com o Maple (esboçando a região R e a elipse em uma mesma janela).

E) Descreva através de inequações o conjunto obtido quando retiramos de R a elipse cheia do item (D).

Obs.: Uma "elipse cheia" é um conjunto limitado e fechado do plano que tem como curva de fronteira uma elipse e que possui interior não-vazio.

Resp.: Se a elipse do item (D) tiver equação $\frac{(x - x_o)^2}{k^2} + \frac{(y - y_o)^2}{l^2} = 1$, então, ao retirarmos da região R a elipse cheia, o conjunto S restante pode ser descrito da seguinte forma:

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ sen(x) \le y \le \cos(x),\ \frac{(x - x_o)^2}{k^2} + \frac{(y - y_o)^2}{l^2} > 1 \right\}$$

F) Forneça a equação de uma elipse de centro (x_1, y_1) que esteja inteiramente contida no **exterior**da região R (é necessário explicitar (x_1, y_1), assim como os semi-eixos da elipse). Verifique sua resposta com o Maple (esboçando a região R e a elipse em uma mesma janela).

. Exemplo 1.4 - Notas de aula "Descrevendo Regiõartesiano e no Espaç

----

5. Seja $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4\,x^2 - 4\,y^2 \le 1,\ \frac{x}{4}^2 + \frac{y}{9}^2 \le 1,\ y \le 0 \right\}$.

A) Esboce a região $R.$
B) Esboce a fronteira e o interior de $R,$ separadamente.
C) Descreva a região R nos dois formatos a seguir:

$R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le \mathrm{b},\ \mathrm{f}(x) \le y \le \mathrm{g}(x) \}$ (Tipo I)

$R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{c} \le \mathrm{y} \le \mathrm{d},\ \mathrm{h}(y) \le x \le j(y) \}$ (Tipo II)

explicitando $a, b, c, d, f, g, h,\ j.$

(Dica: Em qualquer um dos dois formatos, será necessário dividir a região R em 3 sub-regiões.)

B) Descreva a fronteira de R como uma união de 4 curvas, cada uma delas descrita no seguinte formato:

$\mathrm{C} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \mathrm{y} = \mathrm{F}(\mathrm{x}),\ \mathrm{m} \le \mathrm{x} \le \mathrm{n} \right\}$

explicitando $F, m, n.$

----

6. Seja $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le \mathrm{x}^2 + y^2 \le 4 \}$.

A) Esboce a região $R.$
B) Esboce a fronteira e o interior de $R,$ separadamente.
C) Descreva a região R no seguinte formato:

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le \mathrm{b},\ \mathrm{f}(x) \le y \le \mathrm{g}(x)\}$ (Tipo I)

explicitando a, b, f, g.

(Dica: Será necessário dividir a região R em 4 sub-regiões.)

B) Descreva a fronteira de R como uma união de 4 curvas, cada uma delas descrita no seguinte formato:

$\mathrm{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{x} = \mathrm{F(y)},\ \mathrm{m} \le \mathrm{y} \le \mathrm{n}\}$

explicitando F, m, n.
