P1 de Cálculo a Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2013.2
Data: 14 de setembro

Nome: ______________________________ Matrícula: __________
Assinatura: ______________________________ Turma: __________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	2.0		
2	2.5		
3	3.5		
Teste	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- Desenvolva a solução de cada questão de maneira clara e objetiva.
- RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

1. Considere as regiões planas

$$\begin{aligned} R_1 &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x^2+y^2 \leq 2\Big\} \\ R_2 &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \geq 0\ ,\ y \geq 0\Big\} \\ R_3 &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \geq y^2\Big\}\ . \end{aligned}$$

Seja

$$R = R_1 \cap R_2 \cap R_3\,.$$

(a) **(0.4)** Esboce a região R_1 e identifique sua fronteira como uma curva clássica (ou seja, forneça seu nome e sua equação).

(b) **(0.4)** Esboce o interior da região R_2 e determine-o através de desigualdades.

(c) **(0.4)** Esboce a região R_3 e identifique sua fronteira como uma curva clássica (ou seja, forneça seu nome e sua equação).

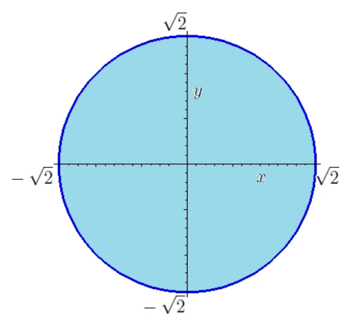
(d) **(0.8)** Esboce a região R e, em seguida, descreva-a no seguinte formato:

$$R = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; a \leq y \leq b\ ,\ f(y) \leq x \leq g(y)\Big\}\ ,$$

explicitando as constantes reais a e b e as funções f e g.

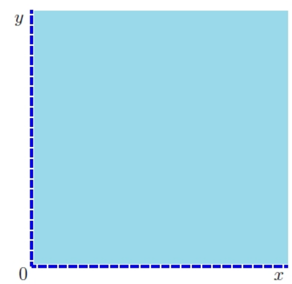
Solução:

(a) Um esboço da região R_1 é o seguinte:



A curva que compõe sua fronteira é um círculo de equação $x^2 + y^2 = 2$, ou seja, com centro na origem e raio $\sqrt{2}$.

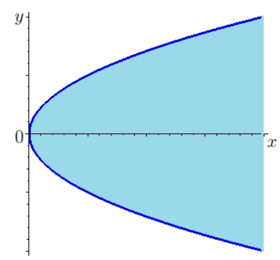
(b) Um esboço do interior da região R_2 é o seguinte:



O interior pode ser descrito por

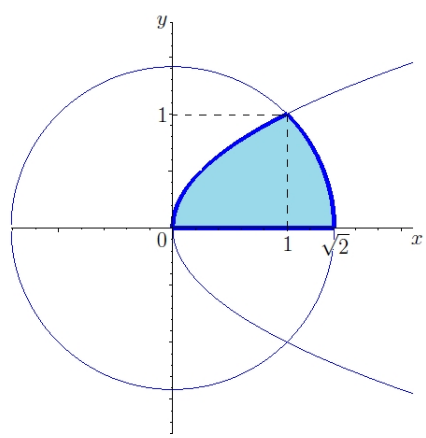
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0\ ,\ y > 0\right\}\ .$$

(c) Um esboço da região R_3 é o seguinte:



A curva que compõe sua fronteira é uma parábola de equação $x = y^2$, ou seja, com vértice na origem e concavidade para a direita.

(d) Como $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3$, seu esboço é dado por:



Para descrever R no formato pedido, observe que y varia de 0 até a altura do ponto de interseção (no primeiro quadrante) entre o círculo $x^2 + y^2 = 2$ e a parábola $x = y^2$. Esta altura pode ser determinada utilizando-se a equação $x = y^2$ para reescrever a equação do círculo: $y^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y = 1$. Já a variação em x é da parábola $x = y^2$ até o semicírculo da direita do círculo $x^2 + y^2 = 2$, ou seja, até $x = \sqrt{2 - y^2}$. Assim,

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq 1 \;,\; y^2 \leq x \leq \sqrt{2 - y^2} \right\} .$$

2. Considere a região espacial

$$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leq z \leq \frac{x}{1 + y} \;,\; (x, y) \in R \right\} ,$$

onde R é a região plana descrita na questão (1).

(a) **(0.7)** Expresse o volume de U como uma soma de integrais iteradas nas variáveis cartesianas x e y, integrando primeiro com respeito a y e em seguida com respeito a x. (*Obs.: Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

(b) **(0.3)** Expresse o volume de U como uma integral iterada nas variáveis cartesianas x e y, integrando primeiro com respeito a x e em seguida com respeito a y. (*Obs.: Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

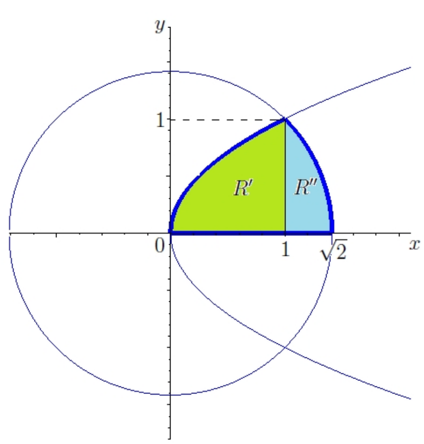
(c) **(1.5)** Calcule o volume de U (usando o método que preferir).

Solução:

(a) O volume de U é dado pela seguinte integral dupla:

$$Vol(U) = \iint_R \frac{x}{1 + y} \, dxdy \, .$$

Para integrar primeiro em y e depois em x, será necessário dividir a região R em duas sub-regiões:



Na região R', x varia entre as constantes 0 e 1 (este último valor é obtido substituindo $y = 1$ na equação da parábola ou na equação do círculo). Já na região R'', x varia de 1 até $\sqrt{2}$ (o raio do círculo). Quanto à variação em y: na região R', y varia da reta $y = 0$ até o ramo superior da parábola $x = y^2$, ou seja, até $y = \sqrt{x}$. Já na região R'', y varia da reta $y = 0$ até o semicírculo superior do círculo $x^2 + y^2 = 1$, ou seja, até $y = \sqrt{2 - x^2}$. Assim,

$$\begin{aligned} R' &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1 \;,\; 0 \leq y \leq \sqrt{x} \right\} \\ R'' &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq x \leq \sqrt{2} \;,\; 0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2} \right\} \end{aligned}$$

Utilizamos então estas descrições para escrever o volume de U através de uma soma de integrais iteradas:

$$\begin{aligned} Vol(U) &= \iint_R \frac{x}{1+y}\, dydx \\ &= \iint_{R'} \frac{x}{1+y}\, dydx + \iint_{R''} \frac{x}{1+y}\, dydx \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{x}{1+y}\, dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{1+y}\, dydx\,. \end{aligned}$$

(b) Utilizando a descrição de R dada no item (1.d), temos que:

$$\begin{aligned} Vol(U) &= \iint_R \frac{x}{1+y}\, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} \frac{x}{1+y}\, dxdy\,. \end{aligned}$$

(c) Utilizando o item (2.b), temos:

$$\begin{aligned} Vol(U) &= \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} \frac{x}{y+1}\, dxdy \\ &= \int_0^1 \frac{2 - y^2 - y^4}{2(y+1)}\, dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^4 + y^2 - 2}{y+1}\, dy \end{aligned}$$

Como $t^2 + t - 2 = (t+2)(t-1)$, utilizando a mudança de variáveis $y^2 = t$

segue que:

$$
\begin{aligned}
Vol(U) &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^4+y^2-2}{y+1}\,dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(y^2+2)(y^2-1)}{y+1}\,dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(y^2+2)(y-1)(y+1)}{y+1}\,dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 (y^2+2)(y-1)\,dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 (y^3-y^2+2y-2)\,dy \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1-2\right] \\
&= \frac{13}{24}\,.
\end{aligned}
$$

3. Considere a região plana D dada por:

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; x^2+y^2-2x\le 0\;,\; x\ge 1\Big\}\;,$$

e a integral dupla

$$I = \iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy\,.$$

   (a) **(0.4)** Esboce a região D.

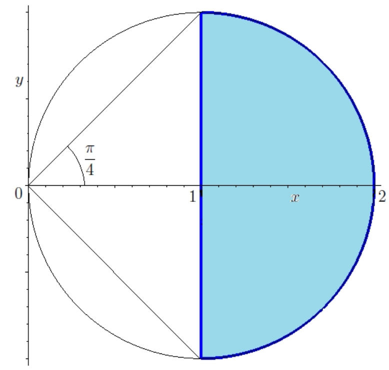
   (b) **(0.8)** Expresse a integral I como uma integral iterada nas variáveis cartesianas x e y, integrando primeiro com respeito a y e em seguida com respeito a x. (*Obs.: Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

   (c) **(0.8)** Expresse a integral I como uma integral iterada nas variáveis polares r e θ. (*Obs.: Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

   (d) **(1.5)** Calcule I (usando o método que preferir).

Solução:

(a) Completando quadrados na equação $x^2+y^2-2x=0$ obtemos $(x-1)^2+y^2=1$, equação do círculo de centro $(1,0)$ e raio 1. A equação $x=1$ é a de uma reta vertical. Logo, um esboço da região D é o que segue:



(b) Observe que D pode ser descrita por:

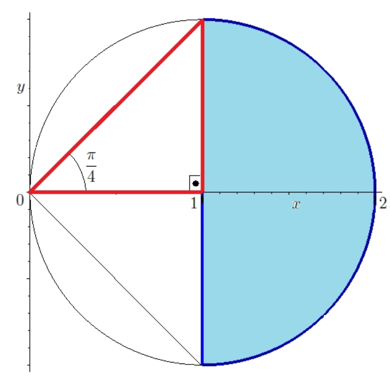
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \le x \le 2 \;,\; -\sqrt{2x - x^2} \le y \le \sqrt{2x - x^2} \right\} ,$$

onde $y = \pm\sqrt{2x - x^2}$ são as equações dos semicírculos superior e inferior de $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Assim,

$$I = \iint_D \frac{x}{x^2 + y^2}\, dxdy = \int_1^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{x}{x^2 + y^2}\, dydx\,.$$

(c) Descreveremos a região D em coordenadas polares r e θ: observando o triângulo destacado na figura abaixo, conclui-se facilmente que $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$.



Já para a variação de r, observe que

$$x = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

e também

$$x^2 + y^2 = 2x,\; x > 0 \Leftrightarrow r = 2\cos(\theta)\,.$$

Logo,

$$D: \quad \frac{1}{\cos(\theta)} \leq r \leq 2\cos(\theta)\,, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\ .$$

E assim podemos escrever:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos(\theta)}}^{2\cos(\theta)} f(r\ \cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\, r\, drd\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos(\theta)}}^{2\cos(\theta)} \cos(\theta)\, drd\theta\,. \end{aligned}$$

(d) Utilizando o item (3.c), temos que:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos(\theta)}}^{2\cos(\theta)} \cos(\theta)\, drd\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2(\theta) - 1)\, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2\theta))\, d\theta \\ &= \left.\frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{2}\right|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 1\ . \end{aligned}$$