P3 de Cálculo a Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2013.2
Data: 23 de novembro

Nome: ______________________________ Matrícula: ______________
Assinatura: ______________________________ Turma: ______________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	3.0		
2	2.0		
3	3.0		
Teste	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- Desenvolva a solução de cada questão de maneira clara e objetiva.
- RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

1. Considere a função

$$f(x,y) = xy + \frac{a}{x} + \frac{b}{y}\,, \quad x > 0,\, y > 0\,,$$

onde $a > 0$ e $b > 0$ são duas constantes reais.

   (a) **(1.5)** Encontre os pontos (x, y) $(x > 0,\ y > 0)$ tais que os autovalores da matriz hessiana de f sejam estritamente positivos nestes pontos.

   (b) **(1.5)** Classifique os pontos críticos de f quanto à sua natureza (máximo local, mínimo local ou sela).

Solução:

(a) Como

$$\begin{aligned} f_x &= y - \frac{a}{x^2} \\ f_y &= x - \frac{b}{y^2} \\ f_{xx} &= \frac{2a}{x^3} \\ f_{yy} &= \frac{2b}{y^3} \\ f_{xy} &= 1\,, \end{aligned}$$

temos que a matriz hessiana de f é dada por:

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2a}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2b}{y^3} \end{pmatrix}.$$

Sendo λ_1 e λ_2 os autovalores da hessiana, sabemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} H(f)(x,y) &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det H(f)(x,y) &= \lambda_1 \lambda_2\,. \end{aligned}$$

Logo, os autovalores são estritamente positivos se e somente se

$$\mathrm{tr} H(f)(x,y) > 0 \quad \text{e} \quad \det H(f)(x,y) > 0\,.$$

A condição sobre o traço é satisfeita para quaisquer pontos (x, y):

$$\mathrm{tr} H(f)(x,y) = \frac{2a}{x^3} + \frac{2b}{y^3} > 0\,,$$

pois $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$, por hipótese.

Estudando então a condição sobre o determinante, temos que:

$$\begin{aligned} \det H(f)(x,y) &= \frac{4ab}{x^3y^3} - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \; xy < \sqrt[3]{4ab}\,. \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que os pontos para os quais os autovalores de $H(f)(x,y)$ são positivos são:

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy < \sqrt[3]{4ab},\, x > 0,\, y > 0 \right\}.$$

Uma outra forma de resolver este item é encontrar explicitamente os autovalores da matriz $H(f)(x,y)$ e verificar as condições para que ambos sejam estritamente positivos. O polinômio característico da matriz hessiana é:

$$\lambda^2 - \lambda\left(\frac{2a}{x^3} + \frac{2b}{y^3}\right) + \left(\frac{4ab}{(xy)^3} - 1\right).$$

Logo, os autovalores são

$$\lambda = \frac{\left(\frac{2a}{x^3} + \frac{2b}{y^3}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2a}{x^3} + \frac{2b}{y^3}\right)^2 - 4\left(\frac{4ab}{(xy)^3} - 1\right)}}{2}.$$

Como a, b, x e y são todos estritamente positivos, os dois autovalores serão também estritamente positivos se e somente se

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{x^3} + \frac{2b}{y^3} > \sqrt{\left(\frac{2a}{x^3} + \frac{2b}{y^3}\right)^2 - 4\left(\frac{4ab}{(xy)^3} - 1\right)} \\ \Leftrightarrow\; & 4\left(\frac{4ab}{(xy)^3} - 1\right) > 0 \\ \Leftrightarrow\; & \frac{4ab}{(xy)^3} > 1 \\ \Leftrightarrow\; & xy < \sqrt[3]{4ab}\,. \end{aligned}$$

(b) O sistema de equações que os pontos críticos de f devem satisfazer é o seguinte:

$$\begin{aligned} f_x &= y - \frac{a}{x^2} = 0 \\ f_y &= x - \frac{b}{y^2} = 0 \end{aligned}$$

Da primeira equação segue que

$$y = \frac{a}{x^2}\,.$$

Substituindo este resultado na segunda equação, temos:

$$x = \frac{bx^4}{a^2} \;\Rightarrow\; x^3 = \frac{a^2}{b} \;\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}\,.$$

Voltando então à primeira equação conclui-se que

$$y = a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^4}} \;\Rightarrow\; y = \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}\,.$$

Logo, o único ponto crítico de f é

$$(x_{cr}, y_{cr}) = \left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}, \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}\right)\,.$$

A hessiana de f neste ponto é dada por:

$$H(f)\,(x_{cr}, y_{cr}) = \begin{pmatrix} \frac{2b}{a} & 1 \\ 1 & \frac{2a}{b} \end{pmatrix}\,,$$

uma matriz com traço $\frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} > 0$ e determinante $\frac{4ab}{ab} - 1 = 3 > 0$, logo o ponto crítico é um ponto de mínimo local.

2. **(2.0)** Seja $c > 0$ uma constante real. Calcule o valor máximo e o valor mínimo da função

$$f(x, y, z) = x^2y^2z^2$$

na esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2\,.$$

Solução:

O valor mínimo é claramente igual a zero, obtido quando uma das coordenadas x ou y ou z é igual a zero. Assim, suponhamos $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

Seja $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Queremos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = c^2 \,, \end{cases}$$

o qual pode ser reescrito como

$$\begin{cases} 2xy^2z^2 = 2x\lambda \\ 2x^2yz^2 = 2y\lambda \\ 2x^2y^2z = 2z\lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por x, a segunda por y e a terceira por z, temos:

$$\begin{cases} 2x^2y^2z^2 = 2x^2\lambda \\ 2x^2y^2z^2 = 2y^2\lambda \\ 2x^2y^2z^2 = 2z^2\lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \,, \end{cases}$$

e conclui-se então que

$$x^2\lambda = y^2\lambda = z^2\lambda \,.$$

Como $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, segue que

$$x^2 = y^2 = z^2 \,.$$

Substituindo este resultado na quarta equação, temos:

$$\begin{aligned} & 3x^2 = c^2 \\ \Rightarrow \quad & x^2 = y^2 = z^2 = \frac{c^2}{3} \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Logo, para pontos (x,y,z) satisfazendo as equações (1), o maior valor de f na esfera é

$$f(x,y,z) = x^2y^2z^2 = \left(\frac{c^2}{3}\right)^3 = \frac{c^6}{27} \,.$$

3. **(2.0)** Considere a região espacial

$$U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2 \right\} \,.$$

e a integral tripla

$$I = \iiint_U e^z \, dxdydz.$$

(a) **(0.5)** Esboce a região U.

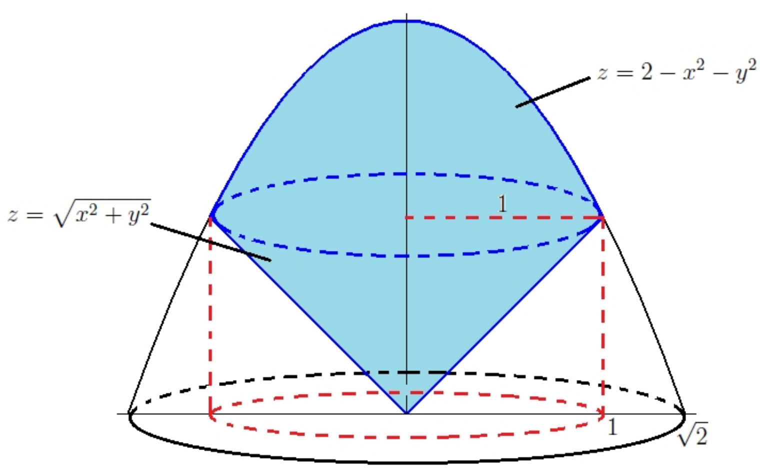
(b) **(0.5)** Escreva I na forma de uma integral iterada, usando obrigatoriamente coordenadas cilíndricas (r, θ, z). (*Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

(c) **(1.0)** Escreva I na forma de uma integral iterada, usando obrigatoriamente coordenadas esféricas (ρ, φ, θ). (*Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

(d) **(1.0)** Calcule I (usando o método que preferir).

Solução:

(a) Um esboço é dado pelo seguinte:



(b) Em coordenadas cilíndricas, as equações do paraboloide e da folha superior do cone se escrevem como $z = 2 - r^2$ e $z = r$, respectivamente. Além disso, a projeção ortogonal no plano xy da curva de interseção das duas superfícies é um círculo centrado na origem de raio 1: $2 - r^2 = r \Rightarrow r = 1$ (pois $r > 0$). Logo,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_U e^z \, dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{2-r^2} re^z \; dzdrd\theta. \end{aligned}$$

(c) Em coordenadas esféricas, a equação do paraboloide se escreve como:

$$\begin{aligned} z = 2 - x^2 - y^2 \quad &\Rightarrow \quad \rho\cos(\phi) = 2 - \rho^2\mathrm{sen}^2(\phi) \\ &\Rightarrow \quad \rho^2\mathrm{sen}^2(\phi) + \rho\cos(\phi) - 2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \rho = \frac{-\cos(\phi) + \sqrt{\cos^2(\phi) + 8\,\mathrm{sen}^2(\phi)}}{2\,\mathrm{sen}^2(\phi)} \quad (\text{pois } \rho > 0)\,. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_U e^z \, dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{-\cos(\phi)+\sqrt{\cos^2(\phi)+8\sin^2(\phi)}}{2\sin^2(\phi)}} e^{\rho\cos(\phi)}\rho^2\mathrm{sen}(\phi)\ d\rho d\phi d\theta. \end{aligned}$$

(d) Utilizando as coordenadas cilíndricas, temos:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{2-r^2} re^z \ dzdrd\theta \\ &= 2\pi\int_0^1 re^z\Big|_r^{2-r^2} \ dr \\ &= 2\pi\int_0^1 \left(re^{2-r^2} - re^r\right)\ dr \\ &= 2\pi\int_0^1 re^{2-r^2}\ dr - 2\pi\int_0^1 re^r\ dr \\ &= I_1 - I_2\,. \end{aligned}$$

A integral I_1 é calculada por substituição simples (basta tomar $u = 2 - r^2$)

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi\int_0^1 re^{2-r^2}\ dr \\ &= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^1 (-2r)e^{2-r^2}\ dr \\ &= -\pi e^{2-r^2}\Big|_0^1 \\ &= -\pi\left(e - e^2\right) \\ &= \pi\left(e^2 - e\right)\,, \end{aligned}$$

enquanto I_2 é calculada por partes:

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\pi\int_0^1 re^r\ dr \\ &= 2\pi\left(re^r - e^r\right)\Big|_0^1 \\ &= 2\pi\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$I = I_1 - I_2 = \pi\left(e^2 - e - 2\right)\ .$$