P4 de Cálculo a Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2012.2
06 de dezembro

Nome: ____________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ____________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	4.0		
2	3.0		
3	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- Desenvolva a solução de cada questão, de maneira clara e objetiva, na folha em que a mesma está enunciada. Utilize o verso da folha se necessário.
- RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

1. Considere a região espacial U definida por

$$U = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \Big| \ y^2 \le x \le 1\,,\ z \ge 0\,,\ y + z \le 10\Big\}$$

(a) **(0.5)** Esboce a região espacial U.

(b) **(1.0)** Escreva a fronteira de U como união de quatro superfícies, S_1, S_2, S_3 e S_4, onde cada uma delas deve ser determinada através de equações ou inequações.

(c) **(1.0)** Expresse a integral tripla

$$\iiint_U xyz \ dx\,dy\,dz\,.$$

através de uma integral iterada.

- *Obs. 1: Neste item, não é pedido o cálculo da integral.*
- *Obs. 2: Você pode escolher o sistema de coordenadas que preferir.*

(d) **(1.5)** Calcule o volume de U.

Solução:

(a) INSERIR FIGURA.

(b) De acordo com o esboço acima, temos que:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \Big| \ z = 0\ ,\ -1 \le y \le 1\ ,\ x \ge y^2\Big\} \\
S_2 &= \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \Big| \ y + z = 10\ ,\ -1 \le y \le 1\ ,\ x \ge y^2\Big\} \\
S_3 &= \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \Big| \ x = 1\ ,\ -1 \le y \le 1\ ,\ 0 \le z \le 10 - y\Big\} \\
S_4 &= \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \Big| \ x = y^2\ ,\ -1 \le y \le 1\ ,\ 0 \le z \le 10 - y\Big\}
\end{aligned}$$

(c) Através de coordenadas cartesianas, podemos escrever:

$$\int_{y=-1}^{1} \int_{x=y^2}^{1} \int_{z=0}^{10-y} xyz \ \ dz\,dx\,dy\ .$$

(d) Utilizando o item anterior, o volume é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(U) &= \int_{y=-1}^{1}\int_{x=y^2}^{1}\int_{z=0}^{10-y} 1\ \ dz\,dx\,dy \\
&= \int_{y=-1}^{1}\int_{x=y^2}^{1} z\Big|_{z=0}^{10-y}\ \ dx\,dy \\
&= \int_{y=-1}^{1}\int_{x=y^2}^{1} 10-y\ \ dx\,dy \\
&= \int_{y=-1}^{1}\int_{x=y^2}^{1} (10x-xy)\Big|_{x=y^2}^{1}\ \ dy \\
&= \int_{y=-1}^{1} \left(10-y-10y^2+y^3\right)\ \ dy \\
&= \left(10y-\frac{y^2}{2}-\frac{10y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_{y=-1}^{1} \\
&= \left(10-\frac{1}{2}-\frac{10}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(-10-\frac{1}{2}+\frac{10}{3}+\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{40}{3}\ .
\end{aligned}$$

2. Considere a função

$$f(x,y,z) = z^2 + x^2 - xy + y^2 \ .$$

(a) **(2.0)** Classifique a superfície de nível $f(x,y,z)=1$. Se for um elipsóide, determine seus semi-eixos; se for um hiperbolóide, determine se ele possui uma ou duas folhas.

(b) **(2.0)** Encontre os pontos da superfície de nível $f(x,y,z)=1$ tal que o plano tangente à superfície em cada um destes pontos tenha o vetor $(1,1,1)$ como vetor normal.

Solução:

(a) Observe que

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A matriz 3×3 acima tem o seguinte polinômio característico:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - \frac{1}{4}\right) \ ,$$

logo, seus autovalores e respectivos autovetores (de norma 1) são

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} \quad , \quad v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\lambda_3 = 1 \quad , \quad v_3 = (0,0,1) \ .$$

Aplicando agora a mudança de variáveis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \end{pmatrix} \ ,$$

onde P é a matriz que possui como colunas os autovetores v_1, v_2, v_3:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

podemos reescrever f como

$$\tilde{f}(x', y', z) = \frac{3x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} + z^2 \,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \tilde{f}(x', y', z) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{3x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} + z^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x'^2}{\frac{2}{3}} + \frac{y'^2}{2} + z^2 = 1 \ , \end{aligned}$$

e então afirmamos que a superfície de nível $f(x,y,z) = 1$ é um elipsóide de centro na origem e com semi-eixos $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{2}$, 1 (paralelos aos eixos x', y' e z, respectivamente).

(b) Em um ponto (x_0, y_0, z_0) da superfície de nível $f(x,y,z) = 1$, seu plano tangente tem $\nabla f\,(x_0, y_0, z_0)$ como vetor normal. Logo, os vetores gradiente de f e $(1,1,1)$ devem ser paralelos:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x - y, 2y - x, 2z) = \lambda(1,1,1) \ ,$$

ou seja, o seguinte sistema de equações deve ser satisfeito:

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda \\ 2y - x = \lambda \\ 2z = \lambda \end{cases}$$

Resolvendo em termos de λ, sua única solução é:

$$(x,y,z) = \left(\lambda, \lambda, \frac{\lambda}{2}\right) \ .$$

Como o ponto deve pertencer à superfície de nível, deve satisfazer a equação $f(x,y,z) = 1$, ou seja,

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda^2}{4} + \lambda^2 - \lambda^2 + \lambda^2 = 1 \\ \Rightarrow \quad &\frac{5\lambda^2}{4} = 1 \\ \Rightarrow \quad &\lambda = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \ . \end{aligned}$$

Assim, os pontos procurados são:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \ \text{e} \ \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \ .$$

3. Considere a função
$$f(x,y,z) = e^{xy}\ln\big(1+x^2z^2\big) \ .$$

(a) **(1.0)** Calcule o gradiente de $f(x,y,z)$ no ponto $(1,1,1)$, ou seja, $\nabla f(1,1,1)$.

(b) **(1.0)** Calcule a segunda derivada f_{xz} no ponto $(1,1,1)$, ou seja, $f_{xz}(1,1,1)$.

Solução:

(a) Temos que:

$$\begin{aligned} f_x &= ye^{xy}\ln(1+x^2z^2) + \frac{2e^{xy}xz^2}{1+x^2z^2} \\ f_y &= xe^{xy}\ln(1+x^2z^2) \\ f_z &= \frac{2e^{xy}x^2z}{1+x^2z^2} \ . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \nabla f(1,1,1) &= \big(f_x(1,1,1), f_y(1,1,1), f_z(1,1,1)\big) \\ &= \left(e\ln(2) + e\,.\,\frac{1}{2}\,.\,2, e\ln(2), e\,.\,\frac{1}{2}\,.\,2\right) \\ &= \Big(e\left(\ln(2)+1\right), e\ln(2), e\Big) \ . \end{aligned}$$

(b) Temos que:

$$\begin{aligned} f_{xz} &= \frac{ye^{xy}2x^2z}{1+x^2z^2} + \frac{\big(e^{xy}.2x.2z(1+x^2z^2)\big) - \big(e^{xy}2xz^2.2x^2z\big)}{\left(1+x^2z^2\right)^2} \\ &= \frac{2x^2yze^{xy}}{1+x^2z^2} + \frac{\big(4xze^{xy}(1+x^2z^2)\big) - \big(4x^3z^3e^{xy}\big)}{\left(1+x^2z^2\right)^2} \ . \end{aligned}$$

Logo,

$$f_{xz}(1,1,1) = \frac{2e}{2} + \frac{8e-4e}{4} = 2e \ .$$

Folha de Rascunho