P4 de Cálculo a Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2013.2
Data: 28 de novembro

Nome: ______________________________ Matrícula: ______________
Assinatura: ___________________________ Turma: ______________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	3.5		
2	4.5		
3	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- Desenvolva a solução de cada questão de maneira clara e objetiva.
- RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

1. Considere a função

$$f(x,y,z) = \frac{xe^y}{z}\,, \quad z \neq 0\,.$$

(a) **(1.5)** Encontre a aproximação linear $L(x,y,z)$ de $f(x,y,z)$ no ponto $(2,0,1)$.

(b) **(1.0)** Utilize $L(x,y,z)$ para encontrar uma aproximação para $f(1.9970, 0.0020, 1.0012)$.

(c) **(1.0)** Determine os pontos (x,y,z), $z \neq 0$, tais que

$$\nabla f(x,y,z) = (-1,1,1)\,.$$

Solução:

(a) Observe que

$$\begin{aligned}
&f(2,0,1) = 2 \\
&f_x(x,y,z) = \frac{e^y}{z} \quad\Rightarrow\; f_x(2,0,1) = 1 \\
&f_y(x,y,z) = \frac{xe^y}{z} \quad\Rightarrow\; f_y(2,0,1) = 2 \\
&f_z(x,y,z) = -\frac{xe^y}{z^2} \;\Rightarrow\; f_z(2,0,1) = -2\,.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
L(x,y,z) &= f(2,0,1) + f_x(2,0,1)(x-2) + f_y(2,0,1)y + f_z(2,0,1)(z-1) \\
&= 2 + (x-2) + 2y + (-2)(z-1) \\
&= x + 2y - 2z + 2\,.
\end{aligned}$$

(b) Como $(1.9970, 0.0020, 1.0012)$ está próximo de $(2,0,1)$, temos:

$$\begin{aligned}
f(1.9970, 0.0020, 1.0012) &\simeq L(1.9970, 0.0020, 1.0012) \\
&= 1.9970 + 2(0.0020) - 2(1.0012) + 2 \\
&= 1.9986\,.
\end{aligned}$$

Obs.: Utilizando o Maple, obtemos que o valor real de $f(1.9970, 0.0020, 1.0012)$ *é 1.998599676, bastante próximo do valor obtido pela aproximação linear.*

(c) Como já visto no item (a), temos que

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{e^y}{z}, \frac{xe^y}{z}, -\frac{xe^y}{z^2}\right)\,.$$

Logo, devemos resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{e^y}{z} &= -1 \\ \frac{xe^y}{z} &= 1 \\ -\frac{xe^y}{z^2} &= 1\,. \end{aligned}$$

Da primeira e segunda equações segue que $x = -1$. Utilizando a segunda equação para reescrever a terceira, temos:

$$\frac{xe^y}{z}\left(-\frac{1}{z}\right) = 1 \Rightarrow z = -1\,.$$

Substituindo este resultado na primeira equação segue que

$$e^y = 1 \Rightarrow y = 0\,.$$

Conclui-se que $(-1, 0, -1)$ é o único ponto tal que $\nabla f(x, y, z) = (-1, 1, 1)$.

2. Seja

$$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)), \quad v > 0$$

onde

$$x(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad y(u, v) = \frac{u}{v}\,.$$

(a) **(1.5)** Calcule F_u e F_v (as derivadas parciais de primeira ordem de F) em função de u, v, f_x e f_y.

(b) **(1.5)** Calcule f_x e f_y (as derivadas parciais de primeira ordem de f) em função de u, v, F_u e F_v.

(c) **(1.5)** Para apenas este item, considere

$$F(u, v) = v\,.$$

Utilizando o item (b), explicite a constante c tal que a função $f(x, y)$ satisfaz a seguinte equação:

$$2xyf_x + \left(1 + y^2\right) f_y = c\,.$$

Solução:

(a) Utilizando a Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned} F_u &= f_x\, x_u + f_y\, y_u \\ &= f_x\, u + f_y\, \frac{1}{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_v &= f_x\, x_v + f_y\, y_v \\ &= f_x\, v + f_y\, \left(-\frac{u}{v^2}\right) . \end{aligned}$$

(b) Pelo item (a) temos que:

$$\begin{aligned} F_u &= f_x\, u + f_y\, \frac{1}{v} \\ F_v &= f_x\, v + f_y\, \left(-\frac{u}{v^2}\right) . \end{aligned}$$

Logo, para o item (b), basta resolver o sistema acima para as variáveis f_x e f_y. Uma forma de fazer isso é pela Regra de Cramer. Reescrevemos o sistema através de uma matriz:

$$\begin{pmatrix} F_u \\ F_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & \frac{1}{v} \\ v & -\frac{u}{v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} ,$$

e então

$$f_x = \frac{\begin{vmatrix} F_u & \frac{1}{v} \\ F_v & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & \frac{1}{v} \\ v & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{u}{v^2} F_u - \frac{1}{v} F_v}{-\frac{(u^2+v^2)}{v^2}} = \frac{1}{u^2+v^2}\,(u\, F_u + v\, F_v) ,$$

$$f_y = \frac{\begin{vmatrix} u & F_u \\ v & F_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & \frac{1}{v} \\ v & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix}} = \frac{u\, F_v - v\, F_u}{-\frac{(u^2+v^2)}{v^2}} = \frac{v^2}{u^2+v^2}\,(v\, F_u - u\, F_v) .$$

(c) Como agora $F(u,v) = v$, temos que $F_u = 0$ e $F_v = 1$. Logo, segue pelo item (b) que

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{v}{u^2+v^2} , \\ f_y &= -\frac{uv^2}{u^2+v^2} . \end{aligned}$$

Podemos então reescrever o lado esquerdo da equação dada no enunciado como:

$$\begin{aligned}
2xyf_x + \left(1+y^2\right) f_y &= 2\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)\!\left(\frac{u}{v}\right)\!\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right) + \left(1+\frac{u^2}{v^2}\right)\!\left(-\frac{uv^2}{u^2+v^2}\right) \\
&= u - u \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Logo, $c = 0$.

3. **(2.0)** Calcule a integral dupla

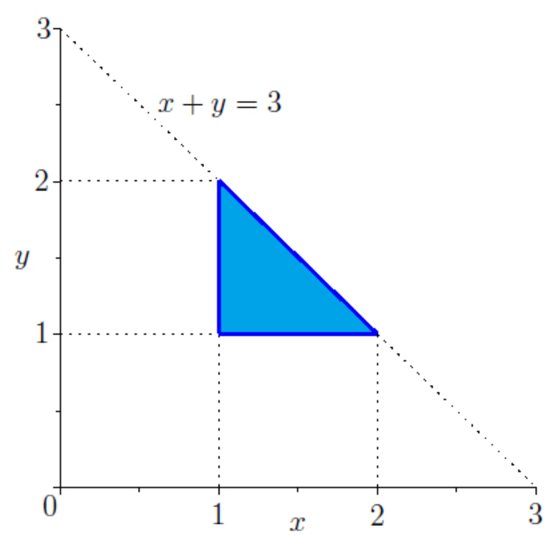
$$I = \iint_D \frac{1}{(x+y)^3}\, dxdy\,,$$

onde D é a seguinte região plana:

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \Big| \ x \geq 1\,,\ y \geq 1\,,\ x+y \leq 3\Big\}\,.$$

Solução:

A região plana D está esboçada abaixo:



Logo,

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \int_1^{3-x} \frac{1}{(x+y)^3}\, dy dx \\
&= \int_1^2 -\frac{1}{2(x+y)^2}\Big|_{y=1}^{3-x} dx \\
&= \int_1^2 \left(-\frac{1}{18} + \frac{1}{2(x+1)^2}\right) dx \\
&= \left(-\frac{x}{18} - \frac{1}{2(x+1)}\right)\Big|_{x=1}^{2} \\
&= -\frac{2}{18} - \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{36}\,.
\end{aligned}$$