P4 de Cálculo a Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2013.1
Data: 02 de julho

Nome: ______________________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ____________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	5.0		
2	5.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

1. Considere a função
$$f(x,y) = \ln\big(\cos(y)\big) - \ln\big(\cos(x)\big) \ ,$$
onde $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

(a) Seja $\nabla f(x,y)$ o gradiente da função f no ponto (x,y).

(i) **(0.5)** Calcule $\nabla f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

(ii) **(0.5)** Encontre um vetor não nulo normal ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, 0, \ln(\sqrt{2})\right)$.

(iii) **(1.0)** Calcule a taxa de variação máxima de $f(x,y)$ em $(x,y) = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

(iv) **(1.0)** Escreva a equação cartesiana do plano tangente ao gráfico de f em $\left(\frac{\pi}{4}, 0, \ln(\sqrt{2})\right)$.

(b) **(1.0)** Seja $H(f)(x,y)$ a matriz hessiana de f no ponto (x,y), e $|\nabla f(x,y)|$ a norma do vetor gradiente de f no ponto (x,y). Calcule a quantidade
$$\frac{\det H(f)\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)}{\left(1 + |\nabla f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)|^2\right)^2} \ ,$$
onde $\det H(f)(x,y)$ denota o determinante da hessiana de f no ponto (x,y).

(c) **(1.0)** Considere a superfície S dada por
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ e^z\cos(x) - \cos(y) = 0\right\} \ .$$
Escreva a equação paramétrica da reta normal a S no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, 0, \ln(\sqrt{2})\right)$.

Solução:

(a) **(i)** Observe que
$$f_x = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \ , \quad f_y = -\frac{\operatorname{sen}(y)}{\cos(y)} \ .$$
Logo,
$$\begin{aligned}
\nabla f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) &= \left(f_x\left(\frac{\pi}{4}, 0\right), f_y\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)\right) \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi/4)}{\cos(\pi/4)}, -\frac{\operatorname{sen}(0)}{\cos(0)}\right) \\
&= (1, 0) \ .
\end{aligned}$$

(ii) As coordenadas de um vetor normal ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, 0, \ln(\sqrt{2})\right)$ são dadas por:

$$\begin{aligned} N\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) &= \left(-f_x\left(\frac{\pi}{4}, 0\right), -f_y\left(\frac{\pi}{4}, 0\right), 1\right) \\ &= (-1, 0, 1)\,. \end{aligned}$$

(iii) A taxa de variação máxima de f em $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ é dada por:

$$\left|\nabla f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)\right| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1\,.$$

(iv) A equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, 0, \ln(\sqrt{2})\right)$ é dada por:

$$\begin{aligned} z &= f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) + \nabla f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}, y\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{2}\right) + (1, 0) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}, y\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = x + \ln\left(\sqrt{2}\right) - \frac{\pi}{4}\,.$$

(b) Observe que

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}\,, \\ f_{yy} &= \frac{-\cos^2(y) - \sin^2(y)}{\cos^2(y)} = -\frac{1}{\cos^2(y)}\,, \\ f_{xy} &= f_{yx} = 0\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$H(f)(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos^2(x)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\cos^2(y)} \end{bmatrix} \Rightarrow H(f)\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det H(f)\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = -2\,.$$

Assim,

$$\frac{\det H(f)\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)}{\left(1 + |\nabla f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)|^2\right)^2} = \frac{-2}{(1 + 1^2)^2} = -\frac{1}{2}\,.$$

(c) Considere
$$g(x,y,z) = e^z\cos(x) - \cos(y)\,.$$

Como S é a superfície de nível 0 da função $g(x,y,z)$, sabemos que o vetor gradiente de g no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, 0, \ln(\sqrt{2})\right)$ é perpendicular à superfície nesse mesmo ponto, ou seja, é um vetor diretor da reta normal. Assim,

$$\begin{aligned} \nabla g(x,y,z) &= \big(-e^z\sin(x), \sin(y), e^z\cos(x)\big) \\ \Rightarrow \nabla g\left(\frac{\pi}{4}, 0, \ln(\sqrt{2})\right) &= \left(-\sqrt{2}\,.\,\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \sqrt{2}\,.\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= (-1, 0, 1)\,. \end{aligned}$$

<u>Obs.</u>: Não é surpresa que o vetor encontrado acima seja o mesmo calculado no item (a.ii). Basta observar que, quando $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, a superfície S nada mais é do que o gráfico da função $f(x,y)$. De fato,

$$\begin{aligned} z = f(x,y) &\Leftrightarrow z = \ln\big(\cos(y)\big) - \ln\big(\cos(x)\big) \\ &\Leftrightarrow z = \ln\left(\frac{\cos(y)}{\cos(x)}\right) \\ &\Leftrightarrow e^z = \frac{\cos(y)}{\cos(x)} \\ &\Leftrightarrow e^z\cos(x) - \cos(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow g(x,y,z) = 0\,. \end{aligned}$$

Finalmente, a equação paramétrica da reta normal é a seguinte:

$$\begin{aligned} r(t) &= \left(\frac{\pi}{4}, 0, \ln(\sqrt{2})\right) + t(-1,0,1) \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - t, 0, \ln(\sqrt{2}) + t\right)\,,\ t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

2. Considere a função
$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - yz\,.$$

(a) **(2.0)** Classifique os pontos críticos da função $f(x,y,z)$, onde $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, determinando se são máximos locais, mínimos locais ou pontos de sela.

(b) **(2.0)** Calcule o <u>valor</u> máximo global e o <u>valor</u> mínimo global de f <u>restrita</u> à esfera
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,.$$

(c) **(1.0)** Calcule o <u>valor</u> máximo global e o <u>valor</u> mínimo global de f <u>restrita</u> ao conjunto compacto
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,.$$

Solução:

(a) Os pontos críticos de f são aqueles que satisfazem o seguinte sistema de equações:
$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 4y - z = 0 \\ f_z = 4z - y = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação segue que $x = 0$. Da segunda equação, temos que $z = 4y$. Logo, a terceira equação pode ser reescrita como $16y - y = 0 \Rightarrow y = 0$. Logo, $z = 0$.

Conclui-se que o único ponto crítico de $f(x, y, z)$ é $P_1 = (0, 0, 0)$. Para classificá-lo, devemos encontrar os autovalores da matriz hessiana de f em $(0, 0, 0)$.

Como
$$\begin{aligned} &f_{xx} = 2 \\ &f_{yy} = 4 \\ &f_{zz} = 4 \\ &f_{xy} = f_{yx} = 0 \\ &f_{xz} = f_{zx} = 0 \\ &f_{yz} = f_{zy} = -1 \end{aligned}$$
segue que
$$H(f)(0,0,0) = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são as raízes de seu polinômio característico $p(\lambda)$:
$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\lambda - 2)\big((\lambda - 4)^2 - 1\big) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 5) = 0 \end{aligned}$$

Logo, os autovalores de A são 2, 3, 5, e então $(0, 0, 0)$ é um mínimo local.

(b) Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar soluções do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 4y - z = 2\lambda y \\ 4z - y = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Caso (1) Se $x \neq 0$, segue da primeira equação que $\lambda = 1$, e então a segunda e terceira podem ser reescritas como

$$\begin{cases} 4y - z = 2y \\ 4z - y = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = z \\ 2z = y \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad y = z = 0\,.$$

Pela quarta equação, temos que $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Logo, obtemos os pontos

$$P_2 = (1, 0, 0) \quad \text{e} \quad P_3 = (-1, 0, 0)\,.$$

Caso (2.i) Se $x = 0$ e $y = 0$, segue da segunda equação que $z = 0$. Entretanto, o ponto $(0, 0, 0)$ não satisfaz a quarta equação.

Caso (2.ii) Se $x = 0$ e $z = 0$, segue da terceira equação que $y = 0$. Entretanto, o ponto $(0, 0, 0)$ não satisfaz a quarta equação.

Caso (2.iii) Se $x = 0$, $y \neq 0$ e $z \neq 0$, segue da segunda equação que

$$\lambda = \frac{4y - z}{2y}$$

e da terceira

$$\lambda = \frac{4z - y}{2z}\,.$$

Igualando as duas expressões para λ:

$$\frac{4y - z}{2y} = \frac{4z - y}{2z} \Rightarrow 8yz - 4z^2 = 8yz - 4y^2$$
$$\Rightarrow z^2 = y^2$$
$$\Rightarrow y = \pm z$$

Se $y = z$, segue pela quarta equação que $2y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Logo, obtemos os pontos

$$P_4 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad P_5 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

Se $y = -z$, segue pela quarta equação que $2y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Logo, obtemos os pontos

$$P_6 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad P_7 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Como

$$\begin{aligned} f(P_2) = f(P_3) &= 1 \\ f(P_4) = f(P_5) &= \frac{3}{2} \\ f(P_6) = f(P_7) &= \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

temos que o valor mínimo de f restrita à esfera é 1, e o valor máximo é $\frac{5}{2}$.

(c) Para encontrar os valores máximo e mínimo de f no conjunto compacto $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, basta comparar os valores obtidos no item (b) com o valor de f em P_1 (ponto crítico de f pertencente ao interior da esfera cheia).

Como $f(P_1) = 0$, segue que o valor mínimo de f é 0, e o valor máximo é $\frac{5}{2}$.