P2 de Cálculo a Várias Variáveis I

MAT 1162 — 2013.2

Data: 08 de outubro

Nome: ______________________________ Matrícula: ____________

Assinatura: ______________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	3.0		
2	3.0		
3	2.0		
Teste	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- Desenvolva a solução de cada questão de maneira clara e objetiva.
- RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

1. Considere a função

$$f(x,y) = e^{2x+3y}\left(8x^2 - 6xy + 3y^2\right)\,,\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

   (a) **(1.5)** Explicite as coordenadas de um vetor normal não nulo N ao gráfico de f em um ponto $\big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big)$.

   (b) **(1.0)** Encontre todos os pontos críticos de $f(x,y)$.

   (c) **(0.5)** Encontre todos os pontos (x,y) tais que o normal N ao gráfico em $\big(x,y,f(x,y)\big)$ seja paralelo ao vetor $(0,0,-3)$.

Solução:

(a) Um vetor normal ao gráfico de f é dado pela fórmula

$$N\,(x_0,y_0) = \big(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1\big)\,,$$

onde

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2e^{2x+3y}\left(8x^2 - 6xy + 3y^2\right) + e^{2x+3y}\,(16x - 6y) \\ &= 2e^{2x+3y}\left(8x^2 + 3y^2 - 6xy + 8x - 3y\right)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= 3e^{2x+3y}\left(8x^2 - 6xy + 3y^2\right) + e^{2x+3y}\,(6y - 6x) \\ &= 3e^{2x+3y}\left(8x^2 + 3y^2 - 6xy + 2y - 2x\right)\,. \end{aligned}$$

(b) Temos que (x,y) é ponto crítico se e somente se

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 + 3y^2 - 6xy + 8x - 3y = 0 \\ 8x^2 + 3y^2 - 6xy + 2y - 2x = 0 \end{cases}$$

Sutraindo a segunda equação da primeira:

$$10x - 5y = 0 \Rightarrow y = 2x\,.$$

Substituindo este resultado na segunda equação:

$$\begin{aligned} & 8x^2 + 12x^2 - 12x^2 - 2x + 4x = 0 \\ \Rightarrow\ & 8x^2 + 2x = 0 \\ \Rightarrow\ & x = 0 \text{ ou } 4x + 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Se $x = 0$, então $y = 0$. Se $x = -\frac{1}{4}$, então $y = -\frac{1}{2}$. Logo, os pontos críticos são

$$(0,0)\,,\quad \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)\,.$$

(c) O vetor normal ao gráfico de f será paralelo ao vetor $(0, 0, -3)$ quando suas duas primeiras coordenadas forem iguais a zero. Ou seja, quando

$$\begin{cases} -f_x(x, y) = 0 \\ -f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \text{ é ponto crítico de } f(x, y)\,.$$

Logo, os pontos são aqueles encontrados no item anterior:

$$(0, 0)\ ,\quad \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)\,.$$

2. Considere as superfícies

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4(y-2)^2 + 3(z-1)^2 = 4\right\}\,, \\ S_2 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^3y^2 + x^3 - 3yz - z^4 = 3\right\}\,. \end{aligned}$$

(a) **(1.0)** Explicite as coordenadas de vetores normais não-nulos $N_1(x, y, z)$ e $N_2(x, y, z)$ às superfícies S_1 e S_2, respectivamente.

(b) **(2.0)** Exiba uma parametrização da curva espacial $C = S_1 \cap S_2$ na forma

$$\alpha(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)\ ,\ t \in [a, b]\,,$$

explicitando $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, a e b.

Solução:

(a) As superfícies S_1 e S_2 são as superfícies de nível 0 das funções F_1 e F_2, respectivamente:

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 4(y-2)^2 + 3(z-1)^2 - 4\,, \\ F_2(x, y, z) &= x^3y^2 + x^3 - 3yz - z^4 - 3\,. \end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} N_1(x, y, z) &= \nabla F_1(x, y, z) = \big(0, 8(y-2), 6(z-1)\big)\ , \\ N_2(x, y, z) &= \nabla F_2(x, y, z) = \big(3x^2y^2 + 3x^2, 6x^3y - 3z, -3y - 4z^3\big)\ . \end{aligned}$$

(b) Note que podemos isolar a variável x na equação que define S_2:

$$x = f(y,z) = \sqrt[3]{\frac{3yz + z^4 + 3}{y^2+1}}\,,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\,,$$

ou seja, S_2 é o gráfico da função $f(y,z)$. Além disso, S_1 é um cilindro horizontal sobre uma elipse no plano yz, cuja equação pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & 4(y-2)^2 + 3(z-1)^2 = 4 \\ \Rightarrow\quad & (y-2)^2 + \frac{(z-1)^2}{\frac{4}{3}} = 1\,. \end{aligned}$$

A projeção ortogonal da curva espacial C no plano yz é a elipse descrita acima, a qual pode ser parametrizada por

$$\beta(t) = \big(y(t), z(t)\big) = \left(2 + \cos(t), 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{sen}(t)\right)\ ,\ t \in [0, 2\pi]\,.$$

Assim, a parametrização de C é dada pelo seguinte:

$$\alpha(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = \big(f(y(t), z(t)), y(t), z(t)\big)\ ,\ t \in [0, 2\pi]\,,$$

onde

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 + \cos(t) \\ z(t) &= 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{sen}(t)\,. \end{aligned}$$

3. **(2.0)** Seja $g : U \to (0, +\infty)$ (ou seja, g é positiva) tal que

$$e^{x^2} + e^{y^2} + e^{(g(x,y))^2} = 4\,,\ \ \forall (x,y) \in U\,,$$

onde U é um aberto contendo $(0,0)$.

Calcule $g(0,0)$ e $\nabla g(0,0)$, escrevendo todos os seus cálculos corretamente.

Solução:

Fazendo $x = y = 0$ na equação $e^{x^2} + e^{y^2} + e^{(g(x,y))^2} = 4$, temos:

$$
\begin{aligned}
& 2 + e^{(g(0,0))^2} = 4 \\
\Rightarrow \quad & e^{(g(0,0))^2} = 2 \\
\Rightarrow \quad & (g(0,0))^2 = \ln(2) \\
\Rightarrow \quad & g(0,0) = \sqrt{\ln(2)} \quad (\text{pois } g \text{ é positiva}) \,.
\end{aligned}
$$

Derivando os dois lados da equação $e^{x^2} + e^{y^2} + e^{(g(x,y))^2} = 4$ com respeito a x, temos:

$$
\begin{aligned}
& 2xe^{x^2} + 2g(x,y)g_x(x,y)e^{(g(x,y))^2} = 0 \\
\Rightarrow \quad & g_x(x,y) = -\frac{xe^{x^2}}{g(x,y)e^{(g(x,y))^2}} \\
\Rightarrow \quad & g_x(0,0) = \frac{0}{2\sqrt{\ln(2)}} = 0 \,.
\end{aligned}
$$

Analogamente, derivando os dois lados da equação $e^{x^2} + e^{y^2} + e^{(g(x,y))^2} = 4$ com respeito a y, temos:

$$
\begin{aligned}
& 2ye^{y^2} + 2g(x,y)g_y(x,y)e^{(g(x,y))^2} = 0 \\
\Rightarrow \quad & g_y(x,y) = -\frac{ye^{y^2}}{g(x,y)e^{(g(x,y))^2}} \\
\Rightarrow \quad & g_y(0,0) = \frac{0}{2\sqrt{\ln(2)}} = 0 \,.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\nabla g(0,0) = \big(g_x(0,0), g_y(0,0)\big) = (0,0) \,.$$

Outro método para resolver essa questão seria o seguinte:

$$
\begin{aligned}
& e^{x^2} + e^{y^2} + e^{(g(x,y))^2} = 4 \\
\Rightarrow \quad & e^{(g(x,y))^2} = 4 - e^{x^2} - e^{y^2} \\
\Rightarrow \quad & (g(x,y))^2 = \ln\left(4 - e^{x^2} - e^{y^2}\right) \\
\Rightarrow \quad & g(x,y) = \sqrt{\ln\left(4 - e^{x^2} - e^{y^2}\right)} \quad (\text{pois } g \text{ é positiva}) \,.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$g(0,0) = \sqrt{\ln(2)} \,.$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
& g_x(x,y) = \frac{-xe^{x^2}}{\sqrt{\ln\left(4-e^{x^2}-e^{y^2}\right)}\left(4-e^{x^2}-e^{y^2}\right)} \\
\Rightarrow \quad & g_x(0,0) = 0 \\
\\
& g_y(x,y) = \frac{-ye^{y^2}}{\sqrt{\ln\left(4-e^{x^2}-e^{y^2}\right)}\left(4-e^{x^2}-e^{y^2}\right)} \\
\Rightarrow \quad & g_y(0,0) = 0\,.
\end{aligned}
$$

E então

$$\nabla g(0,0) = (0,0)\,.$$