P3 de Cálculo a Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2012.1
29 de junho de 2012

Nome: ______________________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ____________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	4.0		
2	2.0		
3	3.0		
Teste	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- Desenvolva a solução de cada questão, de maneira clara e objetiva, na folha em que a mesma está enunciada. Utilize o verso da folha se necessário.
- RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

1. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = (x-3)(y-3)(x+y-3),$$

onde

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geq 3\,,\ x \leq 3\,,\ y \leq 3\Big\}\,.$$

(a) **(0.5)** Esboce a região do plano D. Ao lado, esboce o interior de D.

(b) **(1.0)** Encontre o(s) ponto(s) crítico(s) de $f(x,y)$ no interior de D.

(c) **(1.0)** Classifique o(s) ponto(s) crítico(s) de $f(x,y)$ no interior de D.

(d) **(1.0)** Calcule o valor máximo de $f(x,y)$ em D.

(e) **(0.5)** Calcule o valor mínimo de $f(x,y)$ em D.

Solução:

(a) Esboços.

(b) Observe que

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (y-3)(x+y-3) + (x-3)(y-3) \\ &= (y-3)(2x+y-6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (x-3)(x+y-3) + (x-3)(y-3) \\ &= (x-3)(x+2y-6)\,. \end{aligned}$$

Logo, $f_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = 3$ ou $2x+y-6 = 0$.

Se $y = 3$, então $f_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$. Entretanto, os pontos $(0,3)$ e $(3,3)$ não pertencem ao interior de D, e devem ser descartados.

Se $2x+y-6=0$, então $f_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x+2y-6 = 0$. Se $x = 3$, então $y = 0$, mas o ponto $(3,0)$ também será descartado por não pertencer ao interior de D. Se $x+2y-6=0$, então, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2x+y-6 = 0 \\ x+2y-6 = 0 \end{cases}$$

temos como solução $x = y = 2$. Segue que $(2,2)$ é o único ponto crítico de $f(x,y)$ no interior de D.

(c) Vamos calcular a hessiana de $f(x, y)$ no ponto $(2, 2)$:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2(y-3)\,, \\ f_{xy}(x,y) &= (2x+y-6)+(y-3) \;=\; 2x+2y-9\,, \\ f_{yy}(x,y) &= 2(x-3)\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$H(f)(2,2) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Como $\det H(f)(2,2) = 3 > 0$ e traço $H(f)(2,2) = -4 < 0$, podemos afirmar que $(2, 2)$ é ponto de máximo local de $f(x, y)$ no interior de D.

(d) Observe que

$$\begin{aligned} &f(x,y) > 0, \quad \forall (x,y) \text{ no interior de } D \\ &f(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \text{ na fronteira de } D \end{aligned}$$

Logo, o máximo global de $f(x, y)$ é assumido no interior de D. Como $(2, 2)$ é o único máximo local no interior de D, então ele é também o máximo global.

O valor máximo de $f(x, y)$ em D é dado por

$$f(2,2) = 1\,.$$

(e) Como visto no item anterior, todos os pontos da fronteira de D são mínimos globais de $f(x, y)$ em D. Logo, o valor mínimo é 0.

2. Seja

$$f(x, y, z) = \ln(x) + \ln(y) + 3\ln(z)\,,$$

onde $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

(a) **(1.5)** Calcule o valor máximo de $f(x, y, z)$ no conjunto S dado por

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; x^2 + y^2 + z^2 = 5k^2\,,\; x > 0\,,\; y > 0\,,\; z > 0\Big\}\,,$$

onde k é uma constante positiva.

(b) **(0.5)** Encontre uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$xyz^3 \leq \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}\right)^{\alpha} \sqrt{27}\,,$$

para todo $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Solução:

(a) Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, devemos resolver o seguinte sistema:

$$\frac{1}{x} = \lambda\,.\,2x$$

$$\frac{1}{y} = \lambda\,.\,2y$$

$$\frac{3}{z} = \lambda\,.\,2z$$

Como $\frac{1}{x} \neq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$, temos que $\lambda \neq 0$. Logo, podemos reescrever o sistema da seguinte forma:

$$x^2 = \frac{1}{2\lambda}$$

$$y^2 = \frac{1}{2\lambda}$$

$$z^2 = \frac{3}{2\lambda}$$

Substituindo em $x^2 + y^2 + z^2 = 5k^2$, obtemos:

$$\frac{5}{2\lambda} = 5k^2 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{1}{2k^2}\,.$$

Voltando então ao sistema (e lembrando que $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$), temos que:

$$\begin{aligned} x &= k \\ y &= k \\ z &= k\sqrt{3} \end{aligned}$$

O valor máximo de $f(x,y,z)$ em S é então

$$\begin{aligned} f(k,k,k\sqrt{3}) &= \ln(k) + \ln(k) + 3\ln(k\sqrt{3}) \\ &= \ln(k) + \ln(k) + 3(\ln(\sqrt{3}) + \ln(k)) \\ &= 5\ln(k) + 3\ln(\sqrt{3})\,. \end{aligned}$$

(b) Pelo item anterior, concluímos que

$$\ln(x) + \ln(y) + 3\ln(z) \leq 5\ln(k) + 3\ln(\sqrt{3})$$

se

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5k^2\,;\;\; x > 0\,,\, y > 0\,,\, z > 0\,.$$

Usando as propriedades do logaritmo, segue que:

$$\ln(xyz^3) \leq \ln(k^5 3^{3/2})\,,$$

ou seja,

$$xyz^3 \leq k^5 3^{3/2} = k^5\sqrt{27}\,.$$

Mas

$$k^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{5}\,,$$

logo,

$$xyz^3 \leq \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^{5/2}\sqrt{27}\,.$$

Concluímos então que $\alpha = \frac{5}{2}$.

3. Seja

$$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y + z \leq 5\,,\; z \leq 4 - x^2\,,\; y \geq 0\,,\; z \geq 0 \right\}.$$

Considere a integral tripla

$$I = \iiint_U f(x, y, z)\ dx\, dy\, dz\,,$$

onde $f(x, y, z)$ é uma função contínua.

(a) **(0.5)** Esboce a região espacial U.

(b) **(1.0)** Escreva I na forma de integral iterada:

$$I = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{G(x,z)}^{H(x,z)} f(x, y, z)\ dy\, dz\, dx\,,$$

onde as constantes a e b, e as funções $g(x)$, $h(x)$, $G(x, z)$, $F(x, z)$ devem ser explicitadas.

(c) **(1.5)** Calcule

$$\iiint_U (x + 1)\ dx\, dy\, dz\,.$$

Relacione esta integral com o volume de U.

Solução:

(a) Esboço.

Obs.: Esta região do espaço já foi vista na Monitoria do dia 28 de março (exercício 5).

(b) Pelo esboço acima,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{R_{xz}} \int_{y=0}^{5-z} f(x, y, z)\ dy\, dz\, dx \\ &= \int_{x=-2}^{2} \int_{z=0}^{4-x^2} \int_{y=0}^{5-z} f(x, y, z)\ dy\, dz\, dx\,. \end{aligned}$$

(c) Utilizando o item anterior, temos que:

$$\begin{aligned}
&\int_{x=-2}^{2}\int_{z=0}^{4-x^2}\int_{y=0}^{5-z}(x+1)\ dy\,dz\,dx \\
=\ &\int_{x=-2}^{2}\int_{z=0}^{4-x^2}(x+1)(5-z)\ dz\,dx \\
=\ &\int_{x=-2}^{2}(x+1)\left(5z-\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{4-x^2}\ dx \\
=\ &\int_{x=-2}^{2}(x+1)\left(12-x^2-\frac{x^4}{2}\right)dx \\
=\ &\int_{x=-2}^{2}x\left(12-x^2-\frac{x^4}{2}\right)dx+\int_{x=-2}^{2}\left(12-x^2-\frac{x^4}{2}\right)dx \\
=\ &\left(6x^2-\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{12}\right)\Big|_{-2}^{2}+\left(12x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{10}\right)\Big|_{-2}^{2} \\
=\ &0+2\left(24-\frac{8}{3}-\frac{32}{10}\right) \\
=\ &\frac{544}{15}\,.
\end{aligned}$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
\iiint_U (x+1)\ dx\,dy\,dz &= \iiint_U x\ dx\,dy\,dz+\iiint_U 1\ dx\,dy\,dz \\
&= \bar{x}\,.\,Vol(U)+Vol(U)\,,
\end{aligned}$$

onde $\bar{x}$ é a primeira coordenada do centroide de U.
Como a região U é simétrica com relação ao plano yz, segue que $\bar{x}=0$. Assim,

$$\iiint_U (x+1)\ dx\,dy\,dz=\bar{x}\,.\,Vol(U)+Vol(U)=Vol(U)\,.$$

Concluímos então que

$$Vol(U)=\frac{544}{15}\,.$$