Cálculo a Várias Variáveis I - MAT 1162
2014.1

Cronograma para P1: aulas teóricas (segundas e quartas)

Aula 01 – 12 de fevereiro (quarta)
Aula 02 – 17 de fevereiro (segunda)
Aula 03 – 19 de fevereiro (quarta)

Referências:

- Cálculo Integral a Várias Variáveis – Marcos Craizer e Geovan Tavares
  Seção 1.1 (*Regiões do Plano*)
- Notas de aula (*Noções Topológicas do Plano*)
- Notas de aula (*Descrevendo Regiões no Plano Cartesiano e no Espaço Euclidiano*)

Ementa:

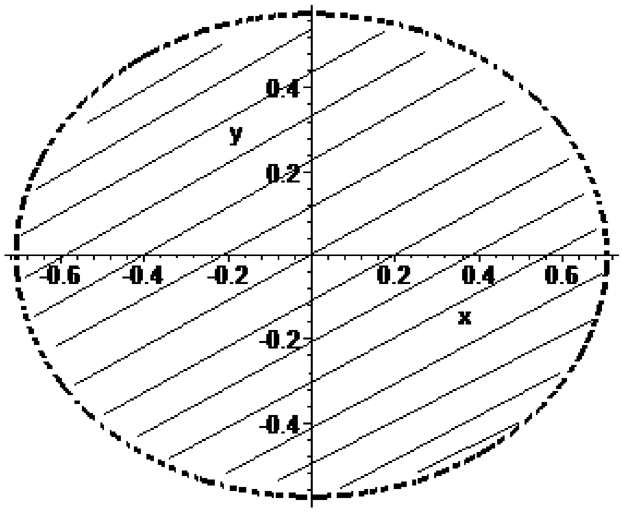
1. Topologia básica do plano

- **Distância** entre dois pontos no plano.

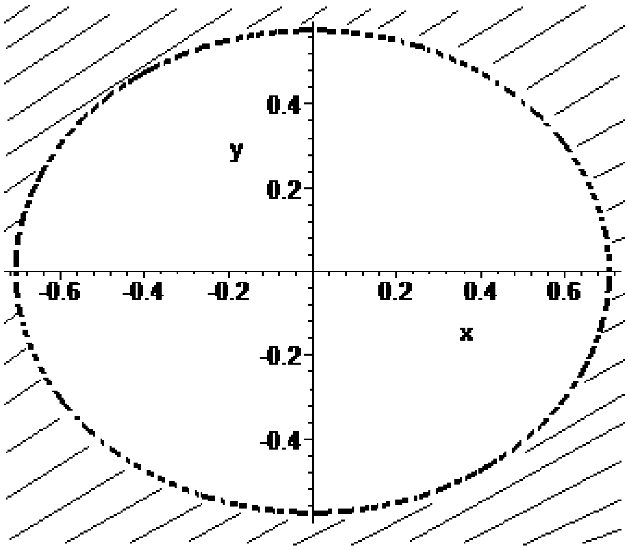
- O conceito de uma **bola aberta** (disco aberto) e o conceito de uma **bola fechada** (disco fechado) no plano.

- O conceito de **região aberta**. Exemplos de regiões abertas dadas por desigualdades estritas. Por exemplo:

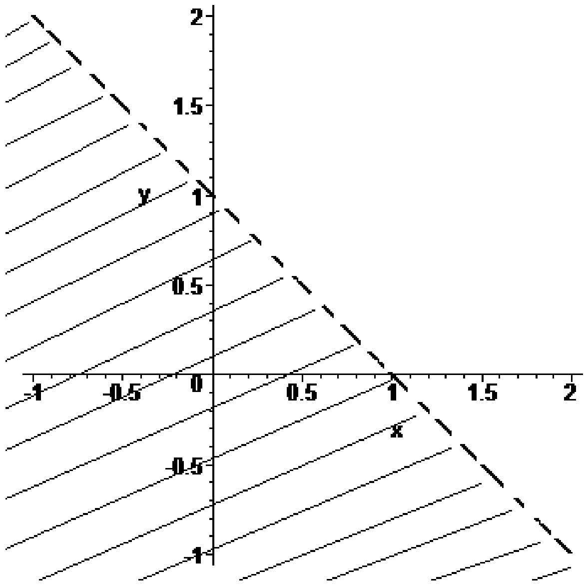
a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3y^2 < 1\}$



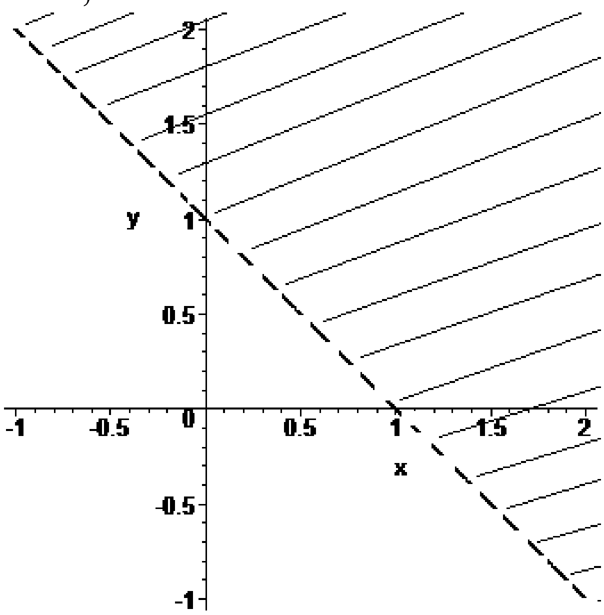
b) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x^2+3y^2>1\right\}$



c) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y<1\right\}$

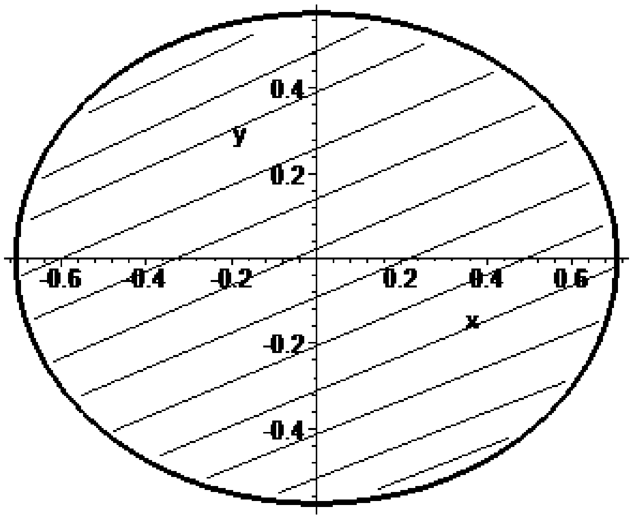


d) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y>1\right\}$

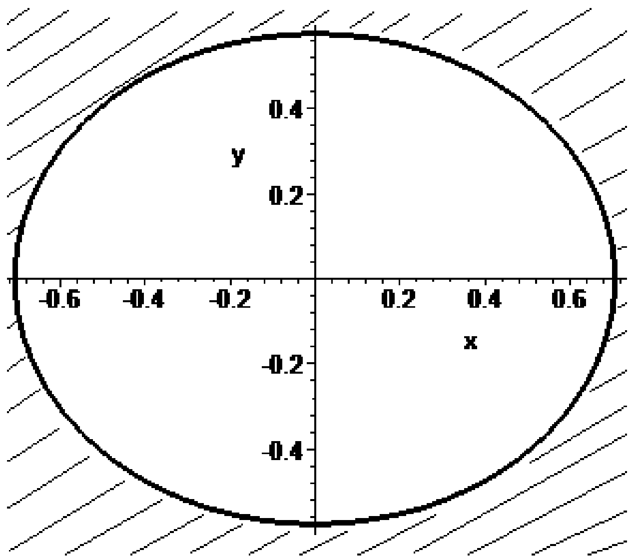


- O conceito de **região fechada**. Exemplos de regiões fechadas dadas por desigualdades não estritas. Por exemplo:

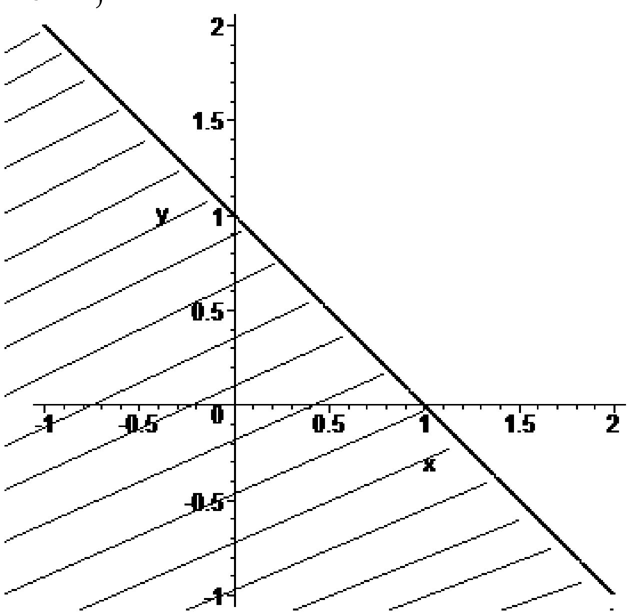
a) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x^2+3y^2\le 1\right\}$



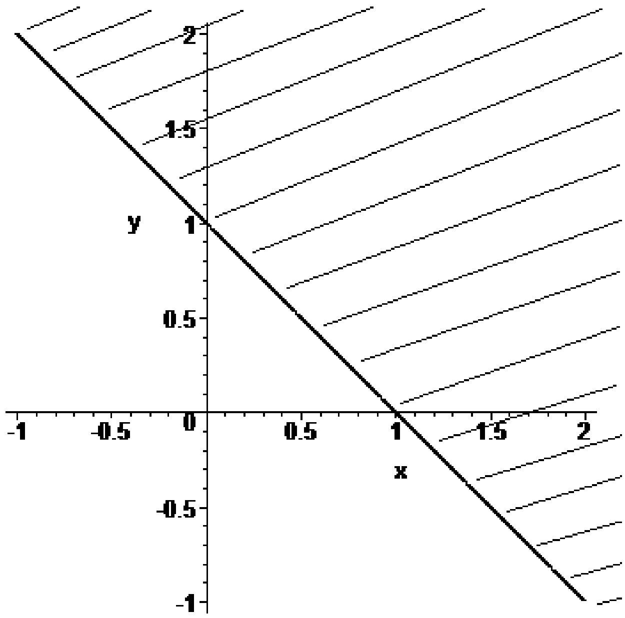
b) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x^2+3y^2\ge 1\right\}$



c) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\le 1\right\}$



d) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\geq 1\}$



- O conceito de **interior** de uma região fechada: o interior de uma região é uma região aberta.
- O conceito de **fronteira** de uma região.
- Enfatizar: Uma região fechada é a união do seu interior com a sua fronteira.
- O conceito de **exterior** de uma região (o exterior é uma região aberta).
- Observar: O plano cartesiano é uma união disjunta do interior de uma região dada, do exterior desta e de sua fronteira. Discutir esta afirmação nos exemplos acima.
- O conceito de **região limitada**. O conceito de **região compacta** (fechada e limitada). Exemplos de regiões fechadas limitadas e ilimitadas, exibindo seus interiores e suas fronteiras.
- Em cada um dos exemplos acima discutir se a região é **limitada** ou não.
- Desenhar regiões deslocadas ou rotacionadas. Por exemplo, regiões limitadas por uma elipse com centros deslocados (enfatizar cônicas no plano em geral). Algumas sugestões:

a) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (y-1)^2-(x+1)^2\leq 1\right\}$ (região delimitada por uma hipérbole deslocada)

b) $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (y-1)^2-x\leq 1\right\}$ (região delimitada por uma parábola “deitada” e deslocada)

- Desenhar várias regiões do plano (hachuradas), limitadas, ilimitadas, fechadas e não fechadas. Ao lado, desenhar o interior das regiões (pontilhado) e a fronteira das regiões (desenhando as curvas que as compõem).
- Geometria das regiões do plano dadas por desigualdades não estritas: Exemplos de regiões limitadas e ilimitadas dadas por desigualdades cujas fronteiras são:

i) parte de retas, ou parábolas, ou hipérboles, ou círculos,

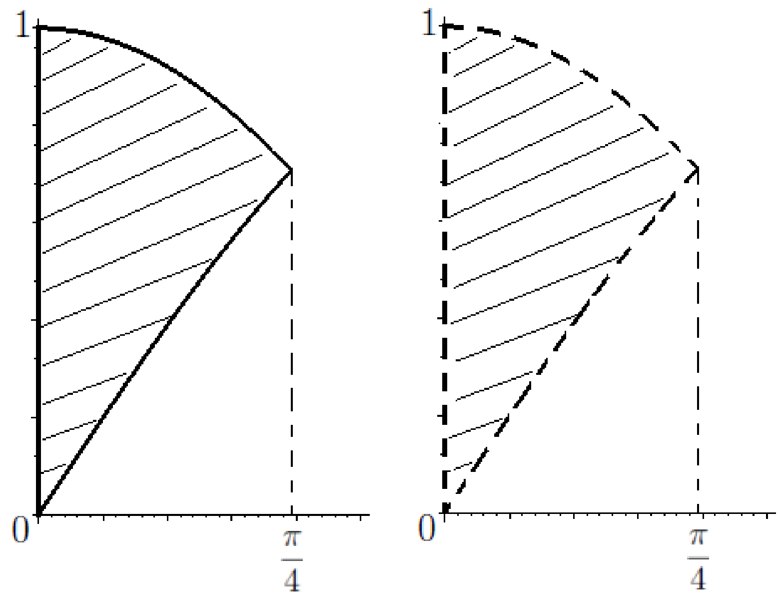
ii) parte de gráficos de funções de uma variável dados por funções polinomiais, trigonométricas ou elementares da forma $y = f(x)$ (gráfico vertical), ou da forma $x = g(y)$ (gráfico horizontal), definidas em intervalos da reta.

- Procure descrever as regiões dadas de pelo menos duas maneiras distintas. Procure descrever por equações ou inequações as fronteiras das regiões. Fazer referência às Notas do Curso.

Exemplos típicos:

1. Seja $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, sen(x) \le y \le \cos(x)\right\}$.

a) Esboce a região R, ao lado esboce o interior de R.



b) Escreva a fronteira de R como uma união de gráficos da forma $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ (gráficos verticais), ou da forma $x = g(y)$, $y \in [c,d]$ (gráficos horizontais), explicitando f, g, a, b, c, d, conforme o caso.

2. Sejam $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\mathrm{x} \le \mathrm{y} \le \mathrm{x}, 0 \le \mathrm{x} \le 1\}$, $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2 - y^2, -1 \le y \le 1\}$.

Seja $R = R_1 \cup R_2$.

a) Desenhe a região R (hachurando), ao lado desenhe o interior de R (pontilhando) e trace a fronteira de R.

b) Escreva R como união de regiões limitadas por gráficos verticais da forma $y = f(x)$.

c) Escreva R como união de regiões limitadas por gráficos horizontais da forma $x = g(y)$.

2. Introdução às superfícies do espaço: regiões espaciais via exemplos

- Desenho de planos, cones, esferas, elipsoides e outras quádricas clássicas, na posição padrão vertical: paraboloide, hiperboloide de uma folha, hiperboloide de duas folhas, paraboloide hiperbólico. Observar os casos em que a superfície é de revolução (ou não).

Alguns exemplos (não são de revolução):

a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1\}$ (elipsoide)

b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 1\}$ (hiperboloide de 1 folha)

c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = -1\}$ (hiperboloide de 2 folhas)

d) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y^2 - 3x^2 - 4z = 0\}$ (paraboloide hiperbólico (sela))

e) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y^2 + 3x^2 - 4z^2 = 0\}$ (cone de duas folhas)

- Compare os exemplos anteriores com os seguintes:

f) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3z^2 - 4y^2 = 1\}$

g) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3z^2 - 4y^2 = -1\}$

h) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y^2 - 3z^2 - 4x = 0\}$

i) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y^2 + 3z^2 - 4x^2 = 0\}$

- Esboçar algumas das superfícies acima (deixando outras como exercício) seguindo a seguinte orientação:
    i. Traçar a interseção das superfícies com os planos coordenados x = 0, y = 0.
    ii. Traçar a interseção das superfícies com os planos z = cst.

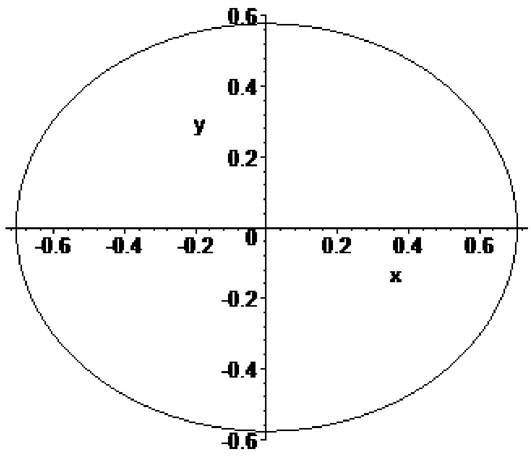
- Fazer desenhos em que as superfícies estejam “deitadas” (trocando as variáveis) ou estejam deslocadas.

- Introduzir o conceito de cilindro sobre uma curva plana e dar vários exemplos. Um exercício importante: identificar a equação

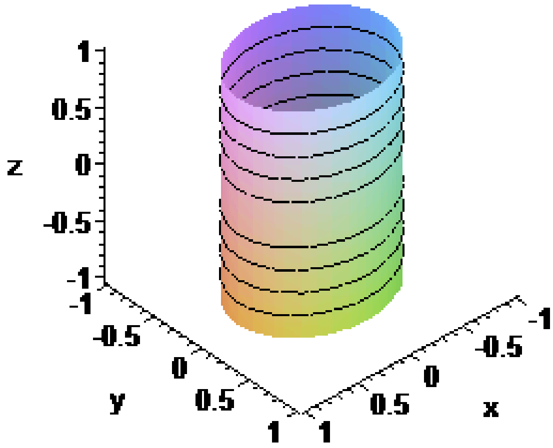
$$2x^2 + 3y^2 = 1$$

como:

a) Uma curva no plano: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3y^2 = 1\}$



b) Uma superfície no espaço: $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x^2+3y^2=1\}$



- Refaça o exercício acima utilizando agora a equação $2x^2+3z^2=1$, identificando-a como subconjunto do plano xz e do espaço $\mathbb{R}^3$.

- Também discutir exemplos de cilindros sobre uma parábola, sobre uma hipérbole, etc.

3. Funções reais de duas variáveis $z=F(x,y)$ cujo domínio é uma região R do plano

- Esboço de gráficos clássicos de funções de duas variáveis da forma $z=F(x,y)$, $(x,y)\in D$.

(O domínio D destas funções é uma região plana que é a projeção do gráfico no plano xy).

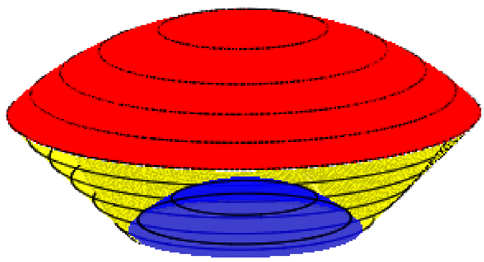
- Esboço de regiões espaciais limitadas pelos gráficos citados acima e por outras superfícies clássicas. Por exemplo, regiões do espaço cuja fronteira é uma união de gráficos de funções dadas por fórmulas elementares (funções cujos gráficos são partes de quádricas), com pedaços de cilindros ou cones.

- Sugestão de exercício: identifique a fronteira do "sólido"

$$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid F(x,y)\le z\le G(x,y),(x,y)\in D\}.$$

- Exemplo típico de uma região espacial limitada por dois gráficos clássicos da forma $z=F(x,y)$ e por um pedaço de um cone:

$$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1\le x^2+y^2+z^2\le 4, z^2\ge x^2+y^2, z\ge 0\}$$



Determine a fronteira de U , usando equações ou inequações. (É preciso explicitar o domínio das funções cujos gráficos compõem a fronteira de U).

- Exemplo de região espacial limitada por gráficos de funções clássicas da forma $z = F(x,y)$ e por um pedaço de cilindro sobre uma curva plana:

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 3 - y, x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

Para este exemplo,

i. Apresente o plano $z = 3 - y$ restrito a $x^2 + y^2 \le 1$. Esboce primeiramente o corte no plano x = 0, e depois em 3d.
ii. Em seguida, analise a região espacial U , fazendo primeiro o corte no plano x = 0.
iii. Discuta a projeção ortogonal de U no plano xy.
iv. Discuta a fronteira de U como união das superfícies S_1, S_2 e S_3, onde

$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, x^2 + y^2 \le 1\right\}$ ("tampa de baixo")

$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 3 - y, x^2 + y^2 = 1\right\}$ (parede lateral)

$S_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3 - y, x^2 + y^2 \le 1\right\}$ ("tampa de cima").

Lembramos que tal exemplo é um caso particular de uma região U do espaço delimitada por dois gráficos $F(x,y)$ e $G(x,y)$ satisfazendo $F(x,y) \le G(x,y)$ onde (x,y) está em uma região R, que é de fato a projeção destes gráficos no plano xy. Você pode dar a expressão geral da fronteira de U .

Outros exemplos podem ser feitos mudando as "funções altura", como o seguinte:

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 2 - x^2 + y^2, x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

- É claro que os gráficos podem ser "deitados" ("horizontais"), isto é, da forma $y = F(x,z)$ e $y = G(x,z)$. Por exemplo, esboce a região U abaixo e descreva sua fronteira via equações ou inequações:

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z \le 5, z \le 4 - x^2, y \ge 0, z \ge 0\right\}$$

Repita o exercício trocando a variável y pela variável z nas inequações acima.

Exercício sugerido:

1. Para cada uma das regiões espaciais U abaixo

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le z \le x^2 - y^2 + 10, x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le \frac{4 - x^2 + y^2}{2}, x^2 + y^2 \le 1, 0 \le x \le y\right\}$$

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - 6 \le z \le e^{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

a) Faça um desenho esquemático de U .
b) Determine a fronteira de U usando equações ou inequações.

Aula 04 – 24 de fevereiro (segunda)
Aula 05 – 26 de fevereiro (quarta)

Referências:

- Cálculo a uma Variável, Vol. 2 – Iaci Malta, Sinésio Pesco e Hélio Lopes
- Cálculo Integral a Várias Variáveis – Marcos Craizer e Geovan Tavares
  Seções 1.2, 3.1, 3.2 e 3.3
- Cálculo, Vol. 2 – James Stewart
  Seções 14.1, 14.2, 15.1, 15.2 e 15.5
- Notas de aula (*Descrevendo Regiões no Plano Cartesiano e no Espaço Euclidiano*)

Ementa:

1. Somas de Riemann e Integração Dupla

- **Definição** de integral dupla sobre um retângulo (discussão sumária).
- Propriedades das integrais duplas (**linearidade**, **aditividade**).
- **Área** de uma região plana.
- **Volume** de uma região do espaço limitada por gráficos da forma $z = F(x, y)$ e $z = G(x, y)$ (também considerar gráficos $y = F(x, \mathrm{z})$ e $y = G(x, \mathrm{z})$, bem como $x = F(\mathrm{y}, \mathrm{z})$ e $x = G(\mathrm{y}, \mathrm{z})$).
- **Integrais iteradas** e o teorema de **Fubini**.
- Cálculo de integrais simples sobre retângulos em que as funções integrando são da forma $f(x)g(y)$ (variáveis separadas).

Exemplo típico:

(P1 – 2013.1) Considere a região espacial

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -4 + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \le \mathrm{z} \le 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}\right\}$$

a) Identifique a fronteira da região plana

$$R = U \cap \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathrm{z} = 0\right\}$$

como uma cônica clássica, ou seja, determine sua equação e seu nome.

b) Escreva a fronteira de U como uma união de superfícies $S_1 \cup S_2$, determinando cada uma delas através de desigualdades ou igualdades. Esboce a fronteira de U.

c) Calcule o volume do sólido V, onde

$$V = U \cap \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \mathrm{x} \le 3, 0 \le y \le 2\right\}.$$

Resp.: $Vol(V) = 43$.

d) Descreva, através de desigualdades ou igualdades, a parte da fronteira de V que está contida no plano $x = 3$.

2. Revisão de técnicas de integração para funções de 1 variável real:

- Substituição simples e direta, integração por partes e integração fazendo uso de fórmulas trigonométricas básicas.

Exemplos típicos:

Calcular as primitivas de

a) $sen^3(\mathrm{x})\cos(x)$
b) $\tan^5(2\,\mathrm{x})\sec^2(2x)$
c) $\dfrac{x}{1+x^2}$
d) e^{3x+2}
e) $\exp(x^3)x^2$
f) xe^{2x}
g) $\dfrac{x}{1+x^2}$
h) $\cos^2(3x+2)$
i) $\cos^3(3x+2)$
j) $x\ln(x)$
k) $\dfrac{\ln(x)}{x}$
l) $e^x sen(x)$
m) $x\cos(x)$

Aula 06 – 10 de março (segunda)

Referências:

- Cálculo Integral a Várias Variáveis – Marcos Craizer e Geovan Tavares
  Seção 3.2
- Cálculo, Vol. 2 – James Stewart
  Seção 15.3
- Notas de aula (*Descrevendo Regiões no Plano Cartesiano e no Espaço Euclidiano*)

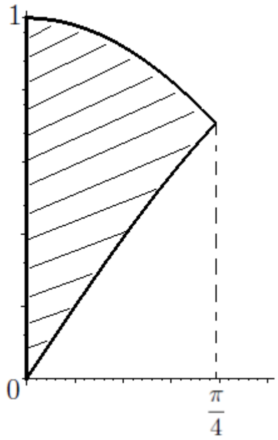
Ementa:

1. Integração de funções em regiões mais gerais do plano

- Região de integração dada por gráficos de funções da forma $y=f(x)$, $y=g(x)$ com a variável independente x variando num intervalo $[a,b]$ (regiões limitadas por dois **gráficos verticais**).

Exemplo típico:

1. Seja $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, sen(x)\le y\le\cos(x)\right\}$.



Seja $F(x,y)$ uma função contínua e seja I a integral dupla de F sobre R.

a) Escreva I na forma de uma integral iterada, integrando primeiro com respeito a y e em seguida com respeito a x.

b) Quando $F(x,y) = \mathrm{x}$, calcule I.

Resp.: $I = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4} - 1$.

- Coordenadas do **centroide** de uma região plana

Exemplos típicos:

1. Seja $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -e^x \le y \le e^x, 0 \le x \le 2\right\}$.

a) Esboce a região R e ao lado esboce o interior de R.

b) Escreva a integral dupla $I = \int\int_R F(x,y)\ dx\ dy$ na forma de uma integral iterada, integrando primeiro com respeito a y e em seguida com respeito a x.

c) Calcule as coordenadas do centroide de R.

d) Calcule a área da região S obtida de R removendo-se um pequeno disco fechado de raio a inteiramente contido em R.

e) Calcule o volume da região espacial

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -e^x \le y \le e^x, 0 \le x \le 2, 0 \le z \le x\right\}$$

Resp.: $Vol(U) = 2(e^2 + 1)$.

Aula 07 – 12 de março (quarta)

Referências:

- Cálculo Integral a Várias Variáveis – Marcos Craizer e Geovan Tavares
  Seções 3.2 e 3.4
- Cálculo, Vol. 2 – James Stewart
  Seções 15.3 e 15.4
- Notas de aula (*Descrevendo Regiões no Plano Cartesiano e no Espaço Euclidiano*)

Ementa:

1. Integração de funções em regiões mais gerais do plano

- Região de integração dada por gráficos de funções da forma $x = f(y)$, $x = g(y)$, com a variável independente y variando num intervalo $[c,d]$ (regiões limitadas por dois **gráficos horizontais**).

Exemplos típicos:

1. Seja $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, sen(x) \le y \le \cos(x)\right\}$. Seja $F(x,y)$ uma função contínua e seja I a integral dupla de F sobre R. Escreva I obrigatoriamente como de integrais iteradas, integrando primeiro com respeito a x e em seguida com respeito a y.

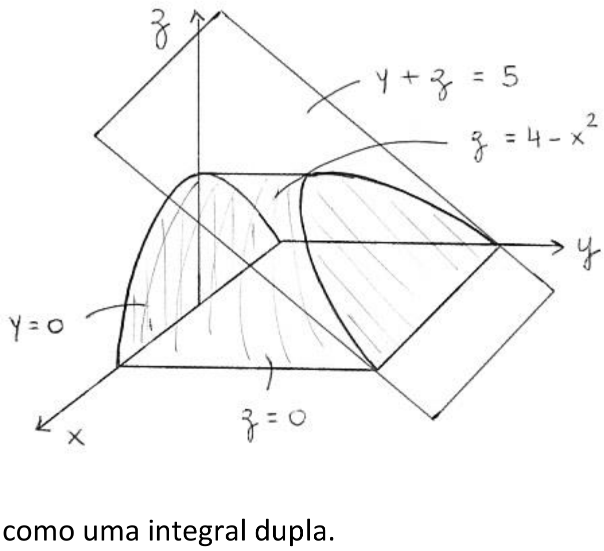
2. Seja $R = R_1 \cup R_2$, onde
$R_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x \le y \le x, 0 \le x \le 1\right\}$ e $R_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2 - y^2, -1 \le y \le 1\right\}$.

a) Escreva a integral dupla I sobre R usando integrais iteradas escritas de duas maneiras distintas.

b) Calcule as coordenadas x e y do centroide de R.

Resp.: $(x,y) = \left(\frac{38}{35}, 0\right)$ (interprete este resultado geometricamente).

3. Seja $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z \le 5, z \le 4 - x^2, y \ge 0, z \ge 0\right\}$.



a) Escreva o volume de U como uma integral dupla.

Resp.: $Vol(\mathrm{U}) = \int_{x=-2}^{2} \int_{z=0}^{4-x^2} 5 - z \; dz \; dx$.

b) Calcule o volume de U.

Resp.: $Vol(\mathrm{U}) = \frac{544}{15}$.

c) Calcule o volume de $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z \le 5, y \le 4 - x^2, y \ge 0, z \ge 0\right\}$.

4. (P1 – 2013.1) Seja $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le y\le 1\}$.

a) Seja $F(x,y)$ uma função contínua definida na região R. Escreva a integral dupla $I=\int\int_R F(x,y)\;dx\;dy$ obrigatoriamente na forma de uma integral iterada, integrando primeiro com respeito a x e em seguida com respeito a y.

b) Escreva a integral dupla do item anterior obrigatoriamente como uma integral iterada, integrando primeiro com respeito a y e em seguida com respeito a x.

c) Calcule $I=\int\int_R e^{y^2}\;dx\;dy$.

Resp.: $I=\dfrac{e-1}{2}$.

5. Seja $R=R_1\cup R_2$, onde

$$R_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{x}\right\},$$
$$R_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x\le\sqrt{2}, 0\le y\le\sqrt{2-x^2}\right\}.$$

Calcule o volume da região espacial $U=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le\dfrac{x}{1+y}, (x,y)\in R\right\}$.

Resp.: $Vol(U)=\dfrac{13}{24}$.

Aula 08 – 17 de março (segunda)
Aula 09 – 19 de março (quarta)

Referências:

- Cálculo Integral a Várias Variáveis – Marcos Craizer e Geovan Tavares
  Seção 3.4
- Cálculo, Vol. 2 – James Stewart
  Seção 15.4
- Notas de aula (*Descrevendo Regiões no Plano Cartesiano e no Espaço Euclidiano*)

Ementa:

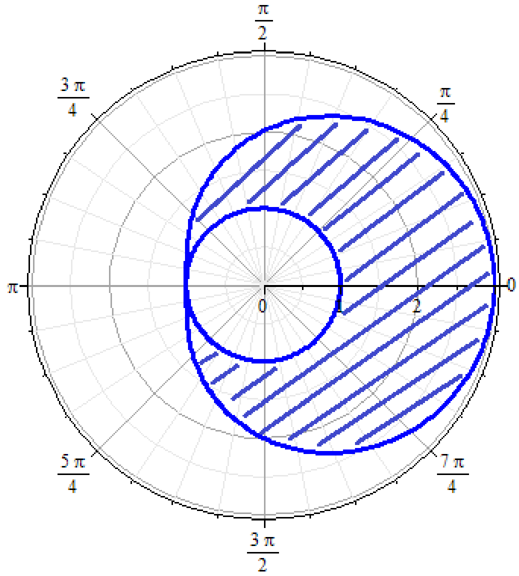
1. Coordenadas Polares

- Regiões do plano determinadas por desigualdades da forma $f(\theta)\le r\le g(\theta)$, onde θ varia num intervalo $[\alpha,\beta]$ (não falar do plano "POL").

- Integração de regiões do plano fazendo uso de coordenadas polares. Vários exemplos podem ser encontrados nas *Notas de Aula*.

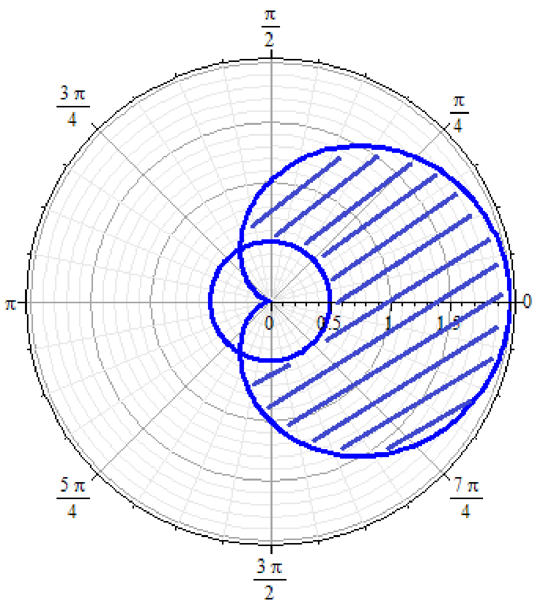
Exemplos típicos:

1. Calcule a área da região R delimitada pelo cardioide $r = 2 + \cos(\theta)$, removendo-se de R o círculo de raio 1 centrado na origem.



Resp.: $A(R) = \dfrac{7\pi}{2}$.

2. Calcule a área da região R delimitada pelo cardioide $r = 1 + \cos(\theta)$, removendo-se de R o disco centrado na origem e de raio $\dfrac{1}{2}$.



3. Considere a região plana $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x + y \le 2, x \ge 0, y \ge 0\}$ e a função $F(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$. Seja I a integral dupla de F sobre R.

a) Escreva, sem fazer cálculos, uma integral iterada que seja igual a I, integrando primeiramente com respeito a variável y e depois com respeito a variável x.

b) Calcule I utilizando coordenadas polares.

Resp.: $I = \dfrac{\pi}{2}$.

4. Seja $U = U_1 \cap U_2$, onde
$$U_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1\right\} \text{ e } U_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{4\left(x^2 + y^2\right)}{3} \leq z^2\right\}.$$
Calcule o volume de U.
Resp.: $Vol(U) = \dfrac{4\pi}{3}$.

5. Seja $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq x^2 - y^2 + 10, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$. Faça um desenho esquemático de U e calcule seu volume.
Resp: $Vol(U) = 11\pi$.

6. (P1 – 2013.1) Seja $R = D \cap H$, onde D é o disco fechado de raio 2 centrado no ponto (0,2) e H é o semiplano fechado $x \geq 0$.
a) Esboce a região plana R e determine-a através de desigualdades em coordenadas polares r e θ.
b) Usando coordenadas polares, escreva a integral dupla $I = \iint_R y \, dx \, dy$ na forma $\int_a^b f(\theta) \, d\theta$, explicitando as constantes a e b e a função $f(\theta)$.
c) Escreva o volume do sólido U em função de I, onde
$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq y + 1, (x, y) \in R\right\}.$$
Resp.: $Vol(U) = I + 2\pi$.

---

21 de março (sexta)

T1 – Horário de aula

Valor: 2,0 pontos

---

22 de março (sábado)

P1 – 11:30 às 13:20

Valor: 8,0 pontos
