

P2 de Equações diferenciais e de diferenças

MAT 1154 — 2004.2

Data: 7 de Outubro de 2004

Nome: \_\_\_\_\_ Matrícula: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	2.0		
2	2.0		
3	3.0		
4	3.0		
Total	10.0		

### Instruções

- Mantenha seu telefone celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Não destaque as folhas da prova.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. (a) Resolva a equação diferencial abaixo:

$$y'' - y = x.$$

- (b) Resolva a equação de diferenças abaixo:

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0, \quad y_0 = y_1 = 1.$$

2. Seja

$$f(x) = \ln(|x - 1|) = \sum_k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_k a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots .$$

- (a) Calcule  $a_k$  para  $k \leq 5$ .
- (b) Encontre uma fórmula para  $a_k$  em função de  $k$ .

3. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$y''(x) - 2xy'(x) - 4y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

- (a) Fazendo  $y(x) = \sum_k a_k x^k$ , use a equação diferencial acima para obter uma equação de diferenças para  $a_k$ .
- (b) Calcule  $a_k$  para  $k \leq 10$ .
- (c) Encontre uma fórmula para  $a_k$  em função de  $k$  (dica: escreva  $b_k = a_{2k+1}$ ,  $c_k = a_{2k}$ ).
- (d) Identifique a função  $y$ .

4. Para cada  $b > 0$ , seja  $f_b$  a única solução de

$$f_b''(t) + bf_b'(t) + f_b(t) = 0, \quad f_b(0) = 0, \quad f_b'(0) = 1.$$

- (a) Calcule  $f_b(t)$  (em função do parâmetro  $b > 0$  e da variável  $t$ ; divida em casos se necessário).
- (b) Determine para quais valores de  $b$  existe  $t > 0$  tal que  $f_b(t) = 0$ .
- (c) Seja  $t_b$  o menor real positivo para o qual  $f_b(t_b) = 0$  (se existir). Calcule  $t_b$  em função de  $b$ .