# Gabarito da P4, 2013.1

## Questão 1

**item (a)**: Tem-se que

$$rot(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{2xy^2}{1+x^2y^2} & 5z - \frac{2}{y(1+x^2y^2)} & 5y \end{vmatrix} = (0,0,0),$$

uma vez que

$$\partial_x\Big(5z - \frac{2}{y(1+x^2y^2)}\Big) = \frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2} \quad \text{e} \quad \partial_y\Big(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}\Big) = \frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2}.$$

**item (b)**: Para encontrar uma família de funções potenciais para $\mathbf{F}$ tem que se resolver $\mathbf{F} = \nabla f$, ou seja, tem que se resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{2xy^2}{1+x^2y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 5z - \dfrac{2}{y(1+x^2y^2)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 5y. \end{cases}$$

Integrando a primeira equação, obtem-se $f(x,y,z) = \ln(1+x^2y^2) + g(y,z)$.

Derivando em ordem a $z$ e substituindo na terceira equação, obtem-se $g(y,z) = 5yz + h(y)$, donde resulta que $f(x,y,z) = \ln(1+x^2y^2) + 5yz + h(y)$.

Derivando novamente em ordem a $y$ e substituindo na segunda equação resulta $h(y) = -2\ln(y) + C$, onde $C$ é uma constante.

Assim, a família de funções potenciais para $\mathbf{F}$ é $f(x,y,z) = \ln(1+x^2y^2) + 5yz - 2\ln(y) + C$, onde $C$ é uma constante.

**item (c)**: Pelo item anterior e segue do Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha que o trabalho é igual a

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot dr = \oint_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot dr = f\Big(r\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big) - f\Big(r\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\Big) = \frac{5\sqrt{2}\pi}{4}.$$

## Questão 2

Pelo Teorema de Green, tem-se que

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D 3x^2 dA,$$

uma vez que $\mathbf{F} = (P, Q)$ e $\partial_x Q(x, y) = 3x^2$ e $\partial_y P(x, y) = 0$.

O domínio D corresponde a $D_1 \bigcup D_2$, onde $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}$ e $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq y \leq 2\sqrt{1 - x^2}\}$. Fazendo mudança para coordenadas polares, ou seja, tomando $x = \rho \cos(\theta)$ e $y = \rho \sin(\theta)$, tem-se então que calcular

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^1 3\rho^2 \cos^2(\theta) \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{3}{16} + \frac{3\pi}{32}.$$

## Questão 3

**item (a)**: Basta verificar que

$$rot(\mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{z^3}{3} + 1 & \frac{x^3}{3} & \frac{y^3}{3} + 4 \end{vmatrix} = (y^2, z^2, x^2).$$

**item (b)**: Pode-se resolver este item de várias formas.

A fronteira $C = \partial S$ da superfície dada corresponde à intersecção do elipsóide com o plano $z = 0$, ou seja, trata-se da curva $\mathcal{C}$ de equação $x^2 + y^2 = 2$ (a circunferência de raio 2 com centro na origem). Pelo Teorema de Stokes,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S rot(\mathbf{G}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r},$$

onde $\mathcal{C}$ é percorrida no sentido anti-horário.

Agora, $\mathcal{C}$ também é fronteira da superfície $S_1$ que corresponde ao disco de raio 2 com centro na origem. Logo, usando novamente o Teorema de Stokes, tem-se

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

Agora, pode-se parametrizar $S_1$ por $r(\rho, \theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), 0)$ com $\rho \in [0, 2]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Daqui resulta que $r_\rho \times r_\theta = (0, 0, \rho)$ e $\mathbf{F}(r(\rho, \theta)) = (\rho^2 \sin^2(\theta), 0, \rho^2 \cos^2(\theta))$. Então

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot n \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 \cos^2(\theta) d\rho d\theta = 4\pi.$$

Alternativamente poderia calcular o integral de linha $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$.

# Questão 4

**item (a): VERDADEIRO.**

A equação dada corresponde a $F(x, y, z) = \ln(xyz) + e^{x+2y-ez} = 0$. Note que $F$ é suave e $F\Big(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{e}\Big) = 0$. Além disso $\partial_x F(x, y, z) = \frac{1}{x} + e^x$, donde resulta que $\partial_x F\Big(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{e}\Big) = 1 + e$. Então pelo Teorema da função implícita, a equação $F(x, y, z) = \ln(xyz) + e^{x+2y-ez} = 0$ define $x$ como função implícita de $y$ e $z$, isto é $x = g(y, z)$, numa vizinhança de $\Big(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{e}\Big)$. Ora

$$\frac{\partial x}{\partial y}\Big(\frac{1}{2}, \frac{2}{e}\Big) = -\frac{\partial_y F\Big(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{e}\Big)}{\partial_x F\Big(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{e}\Big)} = -\frac{(2 + 2e)}{1 + e} = -2.$$

**item (b): FALSA.**

Basta usar a regra da cadeia para obter

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2g'(2x + z)e^{g(2x+z)} + \frac{\partial h}{\partial x}\Big(3y + \sin(x), \cos(z)\Big)\cos(x).$$

Derivando novamente em ordem a $z$, resulta

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}(x, y, z) &= 2g''(2x + z)e^{g(2x+z)} + 2(g'(2x + z))^2 e^{g(2x+z)} \\ &\quad - \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}\Big(3y + \sin(x), \cos(z)\Big)\sin(z)\cos(x).\end{aligned}$$