Gabarito da P3, 2013.1

Questão 1

item (a):

Por exemplo, com parametrização de gráfico

$$S : \mathbf{r}(x, y) = (x, y, 9-x^2-y^2), (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\},$$

ou alternativamente, em coordenadas polares:

$$S : \mathbf{r}(\theta, r) = (r \cos\theta, r \sin\theta, 9 - r^2), 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 3.$$

item(b):

Temos $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (2x, 2y, 1)$ e

$$A(S) = \iint_D ||\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y||\, dx\, dy = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dx\, dy$$
$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr d\theta = \frac{\pi}{16} \int_1^{37} \sqrt{v}\, dv = \frac{\pi}{24}[(37)^{3/2} - 1].$$

item(c):

A orientação induzida pela parametrização de gráfico tem vetores normais para fora. Assim,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y)\, dx\, dy =$$
$$\iint_D (-y, x, x^2 + y^2 - 9) \cdot (2x, 2y, 1)\, dx\, dy = \iint_D (x^2 + y^2 - 9) dx\, dy =$$
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^3 (r^2 - 9) r dr\, d\theta = \frac{\pi}{4} \int_{-9}^0 v\, dv = -\frac{81\pi}{8}.$$

Questão 2

item (a):

Aplicando o Teorema da Divergência no cubo sólido E, temos:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_E \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV =$$

$$2\iiint_E (x+y+z)dx\,dy\,dz = 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x+y+z)dz\,dy\,dz = 3.$$

item (b):

Aqui temos seis integrais de superfícies, mas basta exemplificar com o topo S_1 e a base S_2 do cubo. Em S_1, temos $z=1$ e $\hat{\mathbf{n}}=(0,0,1)$; temos então

$$\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}} = (x^2,y^2,1)\cdot(0,0,1) = 1,$$

donde

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iint_{S_1} dS = A(S_1) = 1.$$

Na base, S_2, temos $z=0$ e $\hat{\mathbf{n}}=(0,0,-1)$; temos então:

$$\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}} = (x^2,y^2,0)\cdot(0,0,-1) = 0,$$

donde:

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = 0.$$

Raciocínio análogo para as outras 2 pares de faces, resultando em:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \sum_{i=1}^{6}\iint_{S_i} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = 3.$$

Questão 3

item (a): FALSA.

Note primeiro que $(-2,2,0)$ satisfaz a equação dada: $-2^3+2.4-8.2.0-3.0.2 = -8+8 = 0$.

Agora, se $F(x,y,z) = x^3 + 2y^2 + 8xz^2 - 3z^3y$, temos

$$\nabla F(x,y,z) = (3x^2 + 8z^2, 4y - 3z^3, 16xz - 9z^2y),$$

logo $\nabla F(-2,2,0) = (12,8,0)$ e portanto pelo teo. da função implícita a eq. é localmente o gráfico de uma função suave, na vizinhança de $(-2,2,0)$, logo admite plano tangente de equação $(12,8,0) \cdot (x+2, y-2, z-0) = 0$ ou $3x + 2y + 2 = 0$.

item (b): VERDADEIRA.

Pelo Teorema de Stokes, com orientações apropriadas para S e C, temos:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 2 \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS,$$

uma vez que, chamando $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ temos:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (A_y z - A_z y, A_z x - A_x z, A_x y - A_y x)$$

e

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_y z - A_z y & A_z x - A_x z & A_x y - A_y x \end{vmatrix} = (2A_x, 2A_y, 2A_z) = 2\mathbf{A}.$$