Gabarito da P2, 2013.1

Questão 1

item (a): Pelo Teorema de Green,

$$I = \oint_C (x^2 + 3x^2y^2)\, dx + (2x^3y + x^2)\, dy, = \iint_R \big(\partial_x Q - \partial_y P\big) dx\, dy,$$

onde $R = \{(x, y) \in\ ) - 2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$ e

$$\begin{cases} \partial_x Q = 6x^2y + 2x \\ \\ \partial_y P = 6x^2y. \end{cases}$$

Logo, $\partial_x Q - \partial_y P = 2x$, e portanto

$$I = \int_{-2}^{2} \Big[\int_0^{4-x^2} 2x\, dy \Big] dx = 2 \int_{-2}^{2} x(4 - x^2)\, dx = 2 \int_{-2}^{2} (4x - x^3)\, dx = 0,$$

uma vez que na última integral o integrando é função ímpar.

item (b): $C = C_1 \cup C_2$, onde $C_1 : \mathbf{r}(x) = (x, 0)$ e $-C_2 : \mathbf{r}(x) = (x, 4 - x^2)$, $-2 \leq x \leq 2$ (lembrando a convenção de sentido anti-horário). Assim,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-2}^{2} \mathbf{F}(x, 0) \cdot (1, 0)\, dx = \int_{-2}^{2} (x^2, x^2) \cdot (1, 0)\, dx = \int_{-2}^{2} x^2\, dx = 16/3,$$

e

$$\int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-2}^{2} \mathbf{F}(x, 4 - x^2) \cdot (1, -2x)\, dx =$$

$$\int_{-2}^{2} (x^2 + 3x^2(4 - x^2)^2, 2x^3(4 - x^2) + x^2) \cdot (1, -2x)\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} [x^2 + 3x^2(4 - x^2)^2 - 4x^4(4 - x^2) - 2x^3]\, dx = 2 \int_0^2 (49x^2 - 40x^4 + 7x^6)\, dx$$

$$= 2\Big[\frac{49}{3}x^3 - 8x^5 + x^7\Big]_0^2 = 16\Big(\frac{49}{3} - 16\Big) = \frac{16}{3}.$$

Finalmente,

$$I = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{16}{3} - \frac{16}{3} = 0.$$

Questão 2

item (a): Calculamos o rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \\ 2xy & x^2 + z^2 & 2yz \end{vmatrix} = (0, 0, 0),$$

logo, o campo é conservativo, já que o domínio é $D = \mathbb{R}^3$.

item (b): Queremos achar um campo escalar φ tal que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ (já sabemos que tal φ existe). Ou seja, temos de resolver o sistema:

$$\begin{cases} \partial_x \varphi = 2xy \\ \partial_y \varphi = x^2 + z^2 \\ \partial_z \varphi = 2yz \end{cases}$$

Integrando a 1a. equação em relação a x obtemos:

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + A(y, z),$$

para certa função $A(y, z)$ a determinar.

Substituindo $\varphi(x, y, z)$ na 2a equação, obtemos:

$$x^2 + \partial_y A(y, z) = x^2 + z^2 \Rightarrow \partial_y A(y, z) = z^2,$$

ou seja, $A(y, z) = yz^2 + h(z)$, para certa função $h(z)$. Substituindo $\varphi(x, y, z) = (x^2 + z^2)y + h(z)$ na 3a. eq. obtemos:

$$2yz + h'(z) = 2yz \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante. Assim, um potencial para $\mathbf{F}$ é:

$$\varphi(x, y, z) = (x^2 + z^2)y + C,$$

ou seja $\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z)$.

item (c): Pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, temos:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C (\nabla\varphi)\cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}(\pi)) - f(\mathbf{r}(0)) = \varphi(1,-1,\pi) - \varphi(1,1,0)$$

$$= (1+\pi^2)(-1) - 1 = -2-\pi^2.$$

Questão 3

item(a): **VERDADEIRO**.

Temos,

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \\ \partial_x g & \partial_y g & \partial_z g \end{vmatrix} = (\partial_y f\partial_z g - \partial_z f\partial_y g, \partial_z f\partial_x g - \partial_x f\partial_z g, \partial_x f\partial_y g - \partial_y f\partial_x g).$$

Logo,

$$\nabla\cdot(\nabla f\times\nabla g) = \cancel{\partial^2_{xy}f\partial_z g} + \cancel{\partial_y f\partial^2_{xz}g} - \cancel{\partial^2_{xz}f\partial_y g} - \partial_z f\partial^2_{xy}g + \partial^2_{yz}f\partial_x g + \partial_z f\partial^2_{yx}g$$
$$- \cancel{\partial^2_{yx}f\partial_z g} - \cancel{\partial_x f\partial^2_{yz}g} + \cancel{\partial^2_{zx}f\partial_y g} + \cancel{\partial_x f\partial^2_{zy}g} - \partial^2_{zy}f\partial_x g - \cancel{\partial_y f\partial^2_{zx}g} = 0,$$

uma vez que as derivadas segundas mistas independem da ordem de diferenciação, de forma que os termos todos se cancelam, como ilustrado acima.

item(b): **FALSO**.

O campo dado está definido no domínio $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\}$, que é aberto convexo, logo simplesmente conexo. Temos que $\forall (x,y)\in D$,

$$\partial_x Q(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

enquanto que

$$\partial_y P(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Assim, $\partial_x Q(x,y) \neq \partial_y P(x,y)$, logo o campo *não* é conservativo em D.