Gabarito da P1, 2013.1

Questão 1

Item (a):

Temos que

$$\nabla h(u,v) = D(f \circ G)(u,v)$$

onde $G(u,v) = (u+v, u-v)$. Pela Regra da Cadeia, temos que:

$$\nabla h(u,v) = Df(G(u,v)).DG(u,v),$$

onde

$$DG(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(G(u,v)) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(G(u,v)) \\ \\ \dfrac{\partial h}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(G(u,v)) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(G(u,v)) \end{cases} .$$

Item (b):

Agora, aplicando novamente a Regra da Cadeia (ver item (a)) e lembrando que para funções classe C^2 as derivadas mistas são iguais, temos:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\big(\frac{\partial h}{\partial v}(u,v)\big) = \frac{\partial}{\partial u}\big(\frac{\partial f}{\partial x}(G(u,v)) - \frac{\partial f}{\partial y}(G(u,v))\big) =$$
$$\big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(G(u,v)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(G(u,v))\big] - \big[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(G(u,v)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(G(u,v))\big]$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(G(u,v)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(G(u,v)),$$

verificando a identidade pedida.

Questão 2

(a) A partícula toca o plano xOz se, para certos instantes t, tivermos $y(t) = t^2 - 1 = 0$. Ou seja, nos instantes $t = \pm 1$; portanto nas posições $\mathbf{r}(1) = (2, 0, 2)$ e $\mathbf{r}(-1) = (-2, 0, 2)$. Como $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (2, 2t, 2t)$, as velocidades respectivas são então $\mathbf{v}(1) = (2, 2, 2)$ e $\mathbf{v}(-1) = (2, -2, -2)$.

Ela nunca atinge o plano xOy, pois nesse caso deveríamos ter $z(t) = t^2 + 1 = 0$, o que é impossível.

Ela atinge o plano yOz quando $x(t) = 2t = 0$, ou seja para $t = 0$, correspondendo à posição $\mathbf{r}(0) = (0, -1, 1)$ com com velocidade $\mathbf{v}(0) = (2, 0, 0)$.

(b) Como o choque é frontal, a velocidade se inverte para $(-2, 0, 0)$ imediatamente após o choque e a partir daí a partícula tem trajetória que é a reta de equação vetorial $\alpha(s) = (0, -1, 1) + s(-2, 0, 0)$. Assim, duas unidades de tempo após o choque ela se encontra na posição $\alpha(2) = (-4, -1, 1)$.

Questão 3

(a) Examinando a fronteira de D:

(I)$0 \leq x \leq 1, y = 0$, corresponde em D^* a $0 \leq u \leq 1, v = 0$;

(II)$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 + 2x^2$, corresponde em D^* a $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2$;

(III) $x = 0, 0 \leq y \leq 2$ corresponde em D^* a $u = 0, 0 \leq v \leq 2$;

(IV) $x = 1, 0 \leq y \leq 4$ corresponde em D^* a $u = 1, 0 \leq 2v \leq 4$.

Logo, temos um retângulo, $D^* = [0, 1] \times [0, 2]$.

(b) A matriz Jacobiana de T é

$$DT(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2uv & 1 + u^2 \end{bmatrix}$$

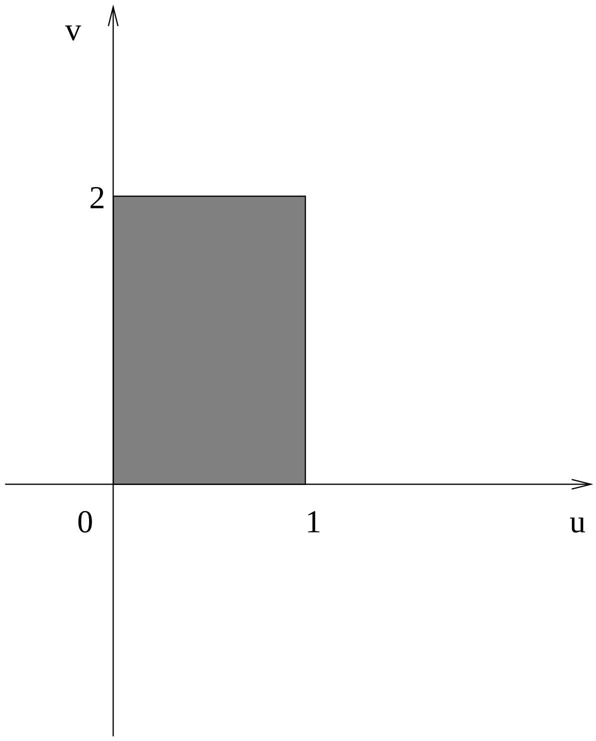

Figura 1: Região D^*.

(c) Pela fórmula de mudança de variáveis, observando que $detDT(u,v) = 1 + u^2 > 0$, temos:

$$\iint_D xy\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_{D^*} vu(1+u^2)^2 du\,dv = \int_0^1 \big[\int_0^2 vu(1+u^2)^2\,du\big]\,dv$$

$$= \big(\int_0^2 vdv\big)\big(\int_0^2 (u + 2u^3 + u^5)\,du\big) = 2[\frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2} + \frac{u^6}{6}]_0^1 = 7/3.$$

(d) Integrando em D:

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1 \big[\int_0^{2+2x^2} xy\,dy\big]dx = 1/2\int_0^1 [xy^2]_0^{2+2x^2} dx$$

$$= 2\int_0^1 (x + 2x^3 + x^5)dx = 2[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}]_0^1 = 7/3.$$