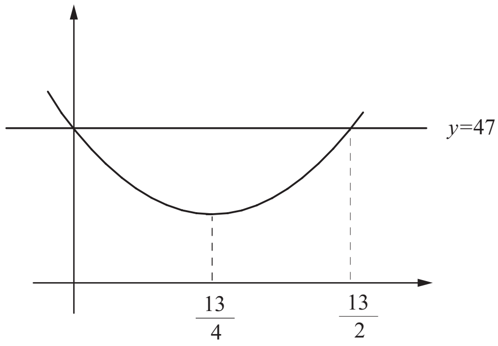
MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G1 – IVa   em 10 setembro de 2012

Questão 1.

Fazendo “ `>plot([f(x), g(x)], x=-8..12);` ” vemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, o comprimento do segmento $\overline{PQ}$ é $f(x) - g(x)$.

Precisamos encontrar as coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico da função h dada por $h(x) = f(x) - g(x) = 7\,x + 10 - (-2\,x^2 + 20\,x - 37) = 2\,x^2 - 13\,x + 47$.




```
> h:=x->2*x^2-13*x+47;
> solve(h(x)=47);
```

$$x_v = \frac{0 + 13/2}{2} = \frac{13}{4}$$

```
> h(13/4);
```

Resposta: $\dfrac{207}{8}$

Questão 2.

(a) $A = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}, f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \dfrac{9}{5}\right)$ “ `> f(sqrt(6)/2) ;` ”

$B = (x, g(x)) = \left(x, \dfrac{9}{5}\right)$ “ `> solve(g(x) = 9/5) ;` ”

$B = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{9}{5}\right)$.

(b) Coordenadas de C: $g(x) = f(x) \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ “ `> solve(g(x) = f(x)) ;` ”

$C = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}, f\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}, 3\right)$.

Assim,

$$\text{Área} = \frac{|AB| \cdot \text{altura}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(3 - \frac{9}{5}\right).$$

Questão 3.

(a) $(x_c, y_c) = (\pi, \pi)$ e raio $= 2$.

$\text{Dom}(f) = [x_c - \text{raio}, x_c + \text{raio}] = [\pi - 2, \pi + 2]$

$\text{Im}(f) = [y_c - \text{raio}, y_c] = [\pi - 2, \pi]$, pois o gráfico de f é o semicírculo inferior.

(b) Equação do círculo: $(x-\pi)^2 + (y-\pi)^2 = 2^2$

Equação do semicírculo inferior: $y - \pi = -\sqrt{2^2 - (x-\pi)^2}$

Resposta: $f(x) = \pi - \sqrt{2^2 - (x-\pi)^2}$

(c)

$$TM = \frac{f(\pi+2) - f(\pi)}{\pi + 2 - \pi} = 1$$

Questão 4.

Seja $h(x)$ a altura do triângulo em termos de x. Temos $\dfrac{x\,h(x)}{2} = 16$ e $h(x) = \dfrac{32}{x}$.

(a) Domínio: $x \leq 27$ (= medida da base do retângulo). Como $h(x) = \dfrac{32}{x} \leq 48$ (=altura do retângulo), temos e $x \geq \dfrac{32}{48} = \dfrac{2}{3}$. $\text{Dom}(P) = [2/3,\ 27]$.

Seja $l(x)$ a medida do lado AC em termos de x. Temos $(l(x))^2 = x^2 + (h(x))^2$ e $P(x) = x + h(x) + l(x) = x + \dfrac{32}{x} + \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{32}{x}\right)^2}$.

(b)

```
> P:=x->x + 32/x + sqrt( x^2 + (32/x)^2);
```

Com " `>plot(P(x), x=2/3..27);` " vemos onde P tem mínimo global.

Escolhendo $x = 5,6568542$ em "`>plot(P(x), x=5.64..5.67);`" temos $erro < 5,67 - 5,64 = 0,03$.

Resposta: $x = 5,6568542$

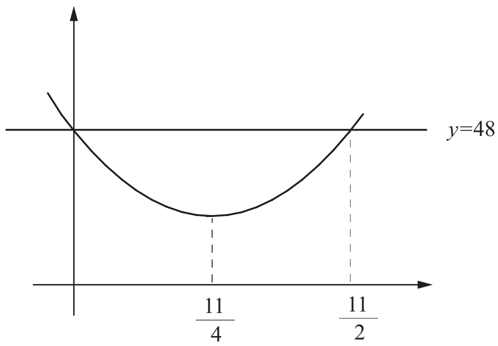
MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G1 – IVb   em 10 setembro de 2012

Questão 1.

Fazendo " `>plot([f(x), g(x)], x=-8..12);` " vemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, o comprimento do segmento $\overline{PQ}$ é $f(x) - g(x)$.

Precisamos encontrar as coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico da função h dada por $h(x) = f(x) - g(x) = 8\,x + 11 - (-2\,x^2 + 19\,x - 37) = 2\,x^2 - 11\,x + 48$.




```
> h:=x->2*x^2-11*x+48;
> solve(h(x)=48);
```

$x_v = \dfrac{0 + 11/2}{2} = \dfrac{11}{4}$

```
> h(11/4);
```

Resposta: $\dfrac{263}{8}$

Questão 2.

(a) $A = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}, f\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ " `> f(sqrt(5)/2) ;` "

$B = (x, g(x)) = \left(x, \dfrac{3}{2}\right)$ " `> solve(g(x) = 3/2) ;` "

$B = \left(\sqrt{10}\,,\, \dfrac{3}{2}\right)$.

(b) Coordenadas de C: $g(x) = f(x) \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ " `> solve(g(x) = f(x)) ;` "

$C = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}, f\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}, 3\right)$.

Assim,

$$\text{Área} = \frac{|AB| \cdot \text{altura}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) - f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(3 - \frac{3}{2}\right).$$

Questão 3.

(a) $(x_c, y_c) = (2,2)$ e raio $= \pi$.

$\text{Dom}(f) = [x_c - \text{raio}, x_c + \text{raio}] = [2-\pi, 2+\pi]$

$\text{Im}(f) = [y_c - \text{raio}, y_c] = [2-\pi, 2]$, pois o gráfico de f é o semicírculo inferior.

(b) Equação do círculo: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = \pi^2$

Equação do semicírculo inferior: $y - 2 = -\sqrt{\pi^2 - (x-2)^2}$

Resposta: $f(x) = 2 - \sqrt{\pi^2 - (x-2)^2}$

(c)

$$TM = \frac{f(2+\pi) - f(2)}{2+\pi-2} = 1$$

Questão 4.

Seja $h(x)$ a altura do triângulo em termos de x. Temos $\dfrac{x\,h(x)}{2} = 14$ e $h(x) = \dfrac{28}{x}$.

(a) Domínio: $x \leq 25$ (= medida da base do retângulo). Como $h(x) = \dfrac{28}{x} \leq 46$ (=altura do retângulo), temos e $x \geq \dfrac{28}{46} = \dfrac{14}{23}$. $\text{Dom}(P) = [14/23,\ 25]$.

Seja $l(x)$ a medida do lado AC em termos de x. Temos $(l(x))^2 = x^2 + (h(x))^2$ e $P(x) = x + h(x) + l(x) = x + \dfrac{28}{x} + \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{28}{x}\right)^2}$.

(b)

```
> P:=x->x + 28/x + sqrt( x^2 + (28/x)^2);
```

Com “ `>plot(P(x), x=14/23..25);` ” vemos onde P tem mínimo global.

Escolhendo $x = 5{,}2915026$ em “`>plot(P(x), x=5.28..5.31);` ” temos $erro < 5{,}31 - 5{,}28 = 0{,}03$.

Resposta: $x = 5{,}2915026$