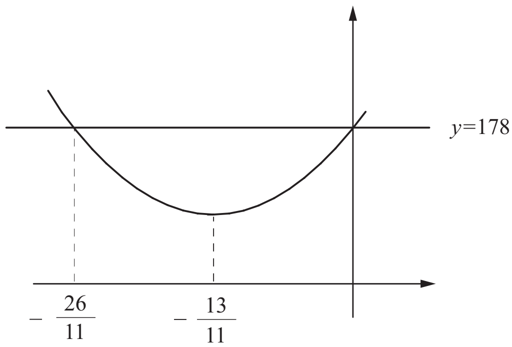
MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G1 – Va em 10 setembro de 2012

Questão 1.

Fazendo " `>plot([f(x), g(x)], x=-8..10);` " vemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, o comprimento do segmento $\overline{PQ}$ é $g(x) - f(x)$.

Precisamos encontrar as coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico da função h dada por $h(x) = g(x) - f(x) = 4\,x^2 - 44\,x + 115 - (-7\,x^2 - 70\,x - 63) = 11\,x^2 + 26\,x + 178$.




```
> h:=x->11*x^2+26*x+178;
> solve(h(x)=178);
```

$$x_v = \frac{-26/11 + 0}{2} = -\frac{13}{11}$$

```
> h(-13/11);
```

Resposta: $\dfrac{1789}{11}$

Questão 2.

(a) $B = \left(\frac{9}{2}, g\left(\frac{9}{2}\right)\right) = \left(\frac{9}{2}, -2\right)$ " `> g(9/2) ;` "

$A = (x, f(x)) = (x, -2)$ " `> solve(f(x) = -2) ;` "

$A = \left(\frac{\sqrt{70}}{10}, -2\right)$.

(b) Coordenadas de C: $g(x) = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$ " `> solve(g(x) = f(x)) ;` "

$C = \left(\frac{7}{2}, f\left(\frac{7}{2}\right)\right) = \left(\frac{7}{2}, 5\right)$. " `> f(7/2) ;` "

Assim,

$$\text{Área} = \frac{|AB| \cdot \text{altura}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{70}}{10}\right)\left(f\left(\frac{7}{2}\right) - f\left(\frac{\sqrt{70}}{10}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{70}}{10}\right)(5+2).$$

Questão 3.

(a) Raio $= 2\sqrt{3}$ e $(x_c, y_c) = (2\sqrt{3}, 7\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$.

$\text{Dom}(f) = [x_c - \text{raio}, x_c + \text{raio}] = [0, 4\sqrt{3}]$

$\text{Im}(f) = [y_c, y_c + \text{raio}] = [5\sqrt{3}, 7\sqrt{3}]$, pois o gráfico de f é o semicírculo superior.

(b) Equação do círculo: $(x - 2\sqrt{3})^2 + (y - 5\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2$

Equação do semicírculo superior: $y - 5\sqrt{3} = \sqrt{12 - (x - 2\sqrt{3})^2}$

Resposta: $f(x) = 5\sqrt{3} + \sqrt{12 - (x - 2\sqrt{3})^2}$

(c)

$$TM = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{\sqrt{12 - (3 - 2\sqrt{3})^2}}{3} = \frac{\sqrt{-9 + 12\sqrt{3}}}{3}$$

Questão 4.

Seja $h(x)$ a altura do triângulo em termos de x. Temos $\dfrac{x\,h(x)}{2} = 12$ e $h(x) = \dfrac{24}{x}$.

(a) Domínio: $x \leq 21$ (= medida da base do retângulo). Como $h(x) = \dfrac{24}{x} \leq 36$ (=altura do retângulo), temos e $x \geq \dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3}$. $\text{Dom}(P) = [2/3,\ 21]$.

Seja $l(x)$ a medida do lado AC em termos de x. Temos $(l(x))^2 = x^2 + (h(x))^2$ e $P(x) = x + h(x) + l(x) = x + \dfrac{24}{x} + \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{24}{x}\right)^2}$.

(b)

```
> P:=x->x + 24/x + sqrt( x^2 + (24/x)^2);
```

Com “ `>plot(P(x), x=2/3..21);` ” vemos onde P tem mínimo global.

Escolhendo $x = 4,898979$ em “`>plot(P(x), x=4.88..4.91);` ” temos

$erro < 4,91 - 4,88 = 0,03$.

Resposta: $x = 4,898979$

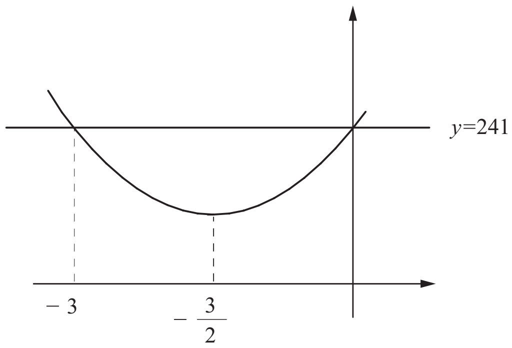
MAT1157 – Cálculo a uma Variável A

GABARITO RESUMIDO DO G1 – Vb em 10 setembro de 2012

Questão 1.

Fazendo " `>plot([f(x), g(x)], x=-8..10);` " vemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, o comprimento do segmento $\overline{PQ}$ é $g(x) - f(x)$.

Precisamos encontrar as coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico da função h dada por $h(x) = g(x) - f(x) = 4\,x^2 - 44\,x + 115 - (-7\,x^2 - 77\,x - 126) = 11\,x^2 + 33\,x + 241$.




```
> h:=x->11*x^2+33*x+241;
> solve(h(x)=241);
```

$x_v = \dfrac{-3+0}{2} = -\dfrac{3}{2}$

```
> h(-3/2);
```

Resposta: $\dfrac{865}{4}$

Questão 2.

(a) $B = \left(\dfrac{9}{2}, g\left(\dfrac{9}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{9}{2}, -6\right)$ " `> g(9/2) ;` "

$A = (x, f(x)) = (x, -6)$ " `> solve(f(x) = -6) ;` "

$A = \left(\dfrac{\sqrt{70}}{10}, -6\right)$.

(b) Coordenadas de C: $g(x) = f(x) \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$ " `> solve(g(x) = f(x)) ;` "

$C = \left(\dfrac{7}{2}, f\left(\dfrac{7}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{7}{2}, 15\right)$. " `> f(7/2) ;` "

Assim,

$$\text{Área} = \frac{|AB| \cdot \text{altura}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{70}}{10}\right)\left(f\left(\frac{7}{2}\right) - f\left(\frac{\sqrt{70}}{10}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{70}}{10}\right)(15+6).$$

Questão 3.

(a) Raio $= 2\sqrt{5}$ e $(x_c, y_c) = (2\sqrt{5}, 7\sqrt{5} - 2\sqrt{5}) = (2\sqrt{5}, 5\sqrt{5})$.

$\text{Dom}(f) = [x_c - \text{raio}, x_c + \text{raio}] = [0, 4\sqrt{5}]$

$\text{Im}(f) = [y_c, y_c + \text{raio}] = [5\sqrt{5}, 7\sqrt{5}]$, pois o gráfico de f é o semicírculo superior.

(b) Equação do círculo: $(x - 2\sqrt{5})^2 + (y - 5\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{5})^2$

Equação do semicírculo superior: $y - 5\sqrt{5} = \sqrt{12 - (x - 2\sqrt{5})^2}$

Resposta: $f(x) = 5\sqrt{5} + \sqrt{20 - (x - 2\sqrt{5})^2}$

(c)

$$TM = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{\sqrt{20 - (5 - 2\sqrt{5})^2}}{5} = \frac{\sqrt{-25 + 20\sqrt{5}}}{5}$$

Questão 4.

Seja $h(x)$ a altura do triângulo em termos de x. Temos $\dfrac{x\,h(x)}{2} = 10$ e $h(x) = \dfrac{20}{x}$.

(a) Domínio: $x \leq 15$ (= medida da base do retângulo). Como $h(x) = \dfrac{20}{x} \leq 34$ (=altura do retângulo), temos e $x \geq \dfrac{20}{34} = \dfrac{10}{17}$. $\text{Dom}(P) = [10/17,\ 15]$.

Seja $l(x)$ a medida do lado AC em termos de x. Temos $(l(x))^2 = x^2 + (h(x))^2$ e $P(x) = x + h(x) + l(x) = x + \dfrac{20}{x} + \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{20}{x}\right)^2}$.

(b)

`> P:=x->x + 20/x + sqrt( x^2 + (20/x)^2);`

Com “ `>plot(P(x), x=10/17..15);` ” vemos onde P tem mínimo global.

Escolhendo $x = 4{,}4721359$ em “`>plot(P(x), x=4.46..4.49);` ” temos $erro < 4{,}49 - 4{,}46 = 0{,}03$.

Resposta: $x = 4{,}4721359$